

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад «Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій
Кафедра математики та інформатики

Бойко Юлія Сергіївна

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ТА ЇХ
ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ШКІЛЬНОГО КУРСУ
МАТЕМАТИКИ

кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Особистий підпис — _____ **Юлія БОЙКО**

Науковий керівник — _____ **Олена ТОІЧКІНА,**
доцент кафедри математики та
інформатики, к.ф.-м.н., доцент

В.о. завідувача кафедри — _____ **Юрій КОЗУБ,**
професор кафедри математики
та інформатики, д. т. н., доцент

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ТА МЕТОДИКА ЇХ ВИВЧЕННЯ.....	6
1.1. Визначення комплексних чисел та їх властивості	6
1.2. Практичне значення у контексті компетентнісного навчання	9
1.3. Методика вивчення комплексних чисел у курсі алгебри та початків аналізу.....	19
Висновки до розділу 1.....	23
РОЗДІЛ 2 ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕМИ «КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА»	24
2.1. Огляд задач шкільного курсу математики на застосування комплексних чисел.....	24
2.2. Система практичних завдань на застосування комплексних чисел у різних галузях науки.....	55
Висновки до розділу 2.....	62
ВИСНОВКИ.....	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	64

ВСТУП

Актуальність дослідження. Спрямованість шкільної освіти на особистісний розвиток учнів, варіативність і відкритість зумовлює переосмислення всіх факторів, від яких залежить якість навчально-виховного процесу. Одним з основних чинників розвитку особистості та формування її базової культури є зміст освіти.

Із впровадженням моделі профільного навчання перед освітянами постала низка проблем, вирішення яких потребує нових теоретичних та практичних досліджень. Однією з таких проблем є добір змісту навчання для курсу математики, курсів за вибором та розробка відповідного методичного забезпечення.

Вивчення комплексних чисел має вагоме значення в математичній культурі учнів, оскільки вони завершують розвиток поняття числа – одну з змістових ліній шкільного курсу математики. Комплексні числа можна застосовувати як безпосередньо в математиці, так і в інших галузях науки і практики.

Для повноцінного розуміння сутності комплексних чисел і їх застосування необхідно вивчати цей розділ у тісному взаємозв'язку з іншими розділами шкільного курсу математики, зокрема в алгебрі – розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коренями, у тригонометрії – використання комплексних чисел для представлення тригонометричних функцій, а також використовувати прикладні задачі.

Завдяки широкому колу застосування комплексних чисел перед учнями відкриваються великі дидактичні можливості для розвитку математичних інтересів учнів. Комплексні числа допомагають їм краще зрозуміти методи пізнання та прикладну функцію математики.

У роботах М. Б. Балк, Я. С. Бродський, Ю. А. Дрозд, З. Д. Куланін, І. А. Кушнір, Е. А. Лаудині, В. С. Марач, О. І. Маркушевич, Г. Н. Новіков

А. А. Полухін, Я. П. Понарін, В. Г. Потапов, З. А. Скопеца, О. П. Шарова, І. Ф. Шарігін, І. М. Яглом досліджували питання застосування комплексних чисел у різних галузях математики та науки в цілому.

О. І. Буковська [4], Б. Г. Орач [21], Г. Н. Пивоваров [22] обґрунтували необхідність вивчення комплексних чисел у середній школі.

Отже, вивчення комплексних чисел у середній школі має бути спрямоване на формування в учнів глибокого розуміння сутності цього поняття та його застосування в різних галузях знань. Для цього необхідно використовувати різноманітні методи і прийоми навчання, а також прикладні задачі.

Метою цієї роботи є дослідження методики вивчення комплексних чисел та їх застосування до розв’язання задач шкільного курсу математики для розвитку математичної компетентності учнів.

Завдання дослідження:

1. Дослідити практичне значення комплексних чисел у контексті компетентнісного навчання та їх роль у розв’язанні квадратних рівнянь.
2. Проаналізувати задачі шкільного курсу математики, які можуть бути розв’язані за допомогою комплексних чисел.
3. Розробити систему практичних завдань на застосування комплексних чисел у різних галузях математики, які можуть бути застосовані у вивченні теми в курсі алгебри та початків аналізу.

Об’єктом дослідження є комплексні числа.

Предметом дослідження є методика вивчення комплексних чисел та їх застосування до розв’язання задач у шкільному курсі математики.

Методи дослідження, які були застосовані у роботі: метод теоретичного аналізу психолого-педагогічної, навчальної, методичної літератури, підручників і програм, що включають розділ “Комплексні числа”; метод порівняння, систематизації, конкретизації та узагальнення практичного та теоретичного матеріалу – під час обґрунтування основних положень

дослідження; педагогічне спостереження, бесіди з учителями, які викладають у профільних класах; аналіз результатів самостійних і контрольних робіт; аналіз і узагальнення педагогічного досвіду.

Теоретична значущість роботи: дослідження включає комплексний підхід до вивчення комплексних чисел, який враховує не тільки їх математичні властивості, але й психолого-педагогічні аспекти сприйняття таких чисел учнями; розкриває нові методичні підходи до вивчення комплексних чисел, враховуючи їх значення в контексті компетентнісного навчання, що сприяє покращенню якості освіти.

Практична значущість роботи: розроблено нові методичні підходи до вивчення теми, а також приклади задач із застосуванням комплексних чисел, які можуть бути використані вчителями математики або практикантами під час проведення уроків, що зробить процес навчання більш цікавим, доступним та ефективним.

Результати дослідження апробовано на IV Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного з них, загального висновку та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ТА МЕТОДИКА ЇХ ВИВЧЕННЯ

1.1. Визначення комплексних чисел та їх властивості

Комплексне число – це число виду $z = a + bi$, де a і b – дійсні числа, а i – уявна одиниця, яка визначається як $\sqrt{-1}$. Запис комплексного числа z у вигляді $z = a + bi$ називають також алгебраїчною формою запису комплексного числа. Дійсне число a називають дійсною частиною комплексного числа z , а дійсне число b – уявною частиною комплексного числа z .

Комплексні числа можна зобразити геометрично у вигляді точки на комплексній площині. Комплексна площина – це площина, на якій кожній точці відповідає комплексне число. Дійсна частина комплексного числа відповідає координаті x точки, а уявна частина – координаті y точки [3].

Над комплексними числами можна виконувати різні операції: додавати, віднімати, множити й ділити.

Сумою комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ називається таке комплексне число z , дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина – сумі уявних частин, тобто

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Різницею комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ є комплексне число z , що є сумою числа z_1 і протилежного до z_2 числа

$$z = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

тобто комплексне число, дійсна і уявна частина якого дорівнюють відповідно різниці дійсних і уявних частин зменшуваного та від’ємника.

Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ є комплексне число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Часткою комплексних чисел z_1 та $z_2 (z_2 \neq 0)$ є таке комплексне число z , що $z_1 = z z_2$. Частку комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ обчислюють за формулою:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Комплексні числа мають багато корисних властивостей, які роблять їх цінним математичним інструментом. Наприклад, будь-яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має хоча б одне розв'язання в комплексних числах [8].

Алгебраїчне представлення комплексного числа є більш зручним для виконання арифметичних операцій, тоді як геометричне дозволяє інтерпретувати алгебраїчні операції з комплексними числами у геометричному вигляді та є зручним у вивченні їх властивостей. Наприклад, зображення комплексних чисел за допомогою векторів на площині. Комплексному числу $(a;b) = a + bi$ ставиться у відповідність радіус-вектор \overline{OM} (див. рис. 1), тобто вектор, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець – у точці $M(a;b)$. Отже, кожному вектору площини з початком в точці $O(0;0)$ і кінцем у точці $M(a;b)$ відповідає комплексне число $(a;b) = a + bi$ і навпаки. Точці $O(0;0)$ відповідає нульовий вектор.

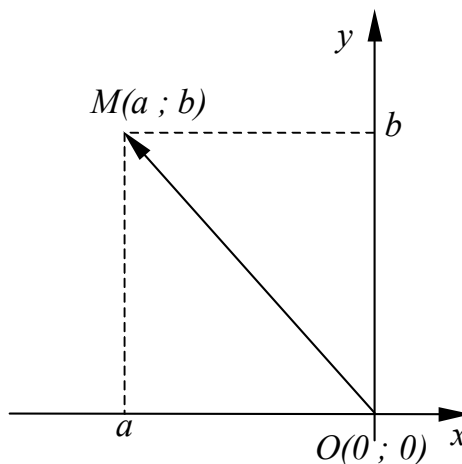


Рис. 1

Просте геометричне пояснення операцій над комплексними числами може дати зображення комплексних чисел векторами.

Нехай числам $\alpha_1 = a_1 + b_1i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2i$ відповідають вектори $\overrightarrow{OA_1}(a_1; b_1)$ і $\overrightarrow{OA_2}(a_2; b_2)$ (рис. 2)

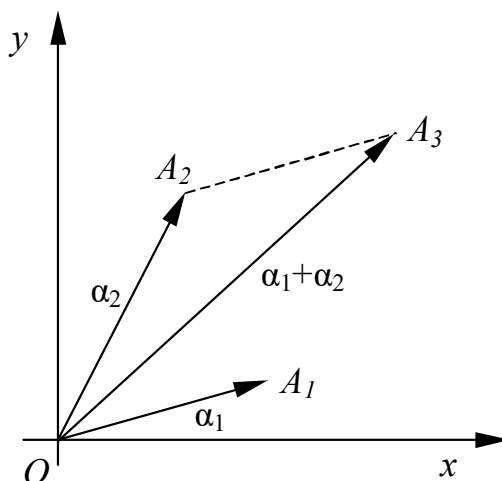


Рис. 2

Числу $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ відповідає вектор з координатами $a_1 + a_2, b_1 + b_2$, тобто вектор $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Додавання векторів $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ виконується за правилом паралелограма.

Отже, додавання комплексних чисел можна звести до додавання відповідних радіус-векторів.

Модуль комплексного числа z відповідає відстані від точки, що представляє число z на комплексній площині, до початку координат. Модуль комплексного числа можна обчислити за формулою

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент комплексного числа z відповідає куту між додатним напрямком осі Ox і радіус-вектором точки, що представляє число z . Аргумент комплексного числа можна обчислити за формулою

$$\arg z = \arctan \frac{b}{a}.$$

Спряженим до комплексного числа z називається число $\bar{z} = \overline{a - bi}$. Число, спряжене до комплексного числа, має той же модуль, що і саме число, але протилежний аргумент [5].

Операції з комплексними числами широко використовуються в різних галузях математики, фізики, інженерії та інформатики, а саме:

- в алгебрі – для вирішення рівнянь і нерівностей, таких як $x + 1 = 0$;
- в аналізі – для вивчення функцій комплексної змінної, таких як $f(z) = z^2$ [22];
- у геометрії – для вивчення геометричних об'єктів, таких як еліпси, гіперболи та криві Безьє [6];
- у фізиці – для моделювання електромагнітного поля, хвиль, квантової механіки та інших фізичних явищ, зокрема опису електромагнітного поля, хвильових процесів, квантових станів і квантових систем [17];
- в інженерії – для проектування електротехнічних приладів, електронних схем, систем зв'язку та інших інженерних об'єктів;
- в інформатиці – для комп'ютерної графіки, обробки звукових сигналів, цифрової обробки зображень, зокрема рендерингу тривимірних зображень, та інших комп'ютерних задач [32].

Отже, комплексні числа – це потужний математичний інструмент, який має широкий спектр застосування в різних галузях математики та інших наук.

1.2. Практичне значення у контексті компетентнісного навчання

В сучасному освітньому середовищі акцент зміщується від простого накопичення знань до розвитку компетентностей – комплексних навичок та здатностей, які дозволяють ефективно вирішувати різноманітні завдання у різних сферах життя.

Серед важливих тем, що вивчаються в математиці, особливе місце належить комплексним числам. Вивчення комплексних чисел набуває

особливого значення в контексті компетентнісного навчання, оскільки ця тема робить вагомий внесок у розвиток різноманітних компетенцій учнів [6].

Сприймаючи математику як засіб для розвитку широкого спектру навичок, ми можемо розглядати комплексні числа як важливий компонент цього процесу. Здатність аналізувати та вирішувати завдання, пов'язані з комплексними числами, вимагає від учнів розвитку аналітичного мислення, логічного виведення та творчого підходу до вирішення проблем. Розуміння операцій з комплексними числами та їх геометрична інтерпретація розвивають здатність учнів працювати з математичними поняттями та перетворювати їх на конкретні практичні результати.

Застосування комплексних чисел у різних наукових дисциплінах, таких як фізика, інженерія, електроніка та інші, робить їх незамінним інструментом для розв'язання практичних завдань. Вивчення комплексних чисел надає учням можливість підготуватися до подальших викликів, з якими вони зіткнуться в майбутньому, де вміння застосовувати математичні поняття для аналізу та розв'язання реальних проблем є ключовим [31].

Алгебраїчне пояснення множення комплексних чисел полягає в тому, що це операція, яка відповідає добутку радіус-векторів, які представляють комплексні числа.

Нехай $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$, де a_1, a_2, b_1, b_2 – дійсні числа. Тоді радіус-вектори, які відповідають цим числам, мають координати (a_1, b_1) і (a_2, b_2) відповідно.

Векторний добуток радіус-векторів z_1 і z_2 визначається як:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Це відповідає добутку комплексних чисел z_1 і z_2 , який визначається як:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Геометрично добуток комплексних чисел відповідає повороту радіус-вектора на кут, який дорівнює сумі аргументів множників.

Наприклад, нехай $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = 3 - 4i$. Тоді радіус-вектори, які відповідають цим числам, мають координати $(1, 2)$ і $(3, -4)$ відповідно.

Добуток радіус-векторів z_1 і z_2 дає $(11, 2)$. Це відповідає добутку комплексних чисел z_1 і z_2 , який дорівнює $11 + 2i$.

Геометрично добуток z_1 і z_2 відповідає повороту радіус-вектора z_1 на кут 30° за годинниковою стрілкою [24].

Множення комплексних чисел є важливою операцією в алгебрі, яка має багато застосувань у фізиці, інженерії та інших галузях.

Ділення комплексних чисел можна зобразити геометрично як відображення радіус-вектора z на коло радіуса 1, центр якого збігається з початком координат.

Нехай $z = a + bi$, де a і b – дійсні числа. Тоді радіус-вектор, який відповідає цьому числу, має координати (a, b) .

Щоб розділити z на w , де $w = c + di$, де c і d – дійсні числа, потрібно відобразити радіус-вектор z на коло радіуса 1, центр якого збігається з початком координат.

Оскільки добуток радіус-векторів відповідає добутку комплексних чисел, то добуток радіус-вектора z на радіус-вектор $w - 1$ відповідає добутку комплексних чисел $zw - 1$.

Радіус-вектор $w - 1$ має координати $(-d, c)$. Тому добуток радіус-векторів z і $w - 1$ має координати $(a + cd, b - dc)$. Це відповідає частці комплексних чисел $z \div w = (a + cd) + (b - dc)i$. Наприклад, нехай $z = 1 + 2i$ і $w = 3 - 4i$. Тоді радіус-вектори, які відповідають цим числам, мають координати $(1, 2)$ і $(3, -4)$ відповідно. Радіус-вектор, який відповідає частці $z \div w$, має координати $(-6, 9)$. Це відповідає частці комплексних чисел $z \div w = -6 + 9i$. Геометрично ділення z на w відповідає відбиттю радіус-вектора z на коло радіуса 1, центр якого збігається з початком координат [26].

Комплексні числа мають широке застосування в математиці, зокрема, для розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Будь-яке алгебраїчне рівняння $ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d = 0$, де $a \neq 0$, має n коренів. Якщо всі корені цього рівняння дійсні, то вони можуть бути знайдені за допомогою стандартних методів розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Однак якщо хоча б один із коренів є комплексним, то стандартні методи розв'язання не працюють. У цьому випадку необхідно використовувати спеціальні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями.

Одним з найпростіших методів розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями є метод Руффіні-Гауса. Цей метод дозволяє знайти всі корені рівняння, використовуючи лише дійсні числа.

Іншим методом розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями є метод комплексного зображення. Цей метод дозволяє знайти всі корені рівняння, представляючи рівняння у вигляді комплексного зображення. Метод комплексного зображення є більш потужним, ніж метод Руффіні-Гауса, оскільки він дозволяє розв'язувати рівняння, які не піддаються розв'язанню за допомогою методу Руффіні-Гауса [30].

Комплексні числа мають також застосування в інших галузях математики. Розглянемо застосування комплексних чисел до завдань елементарної геометрії.

Площина комплексних чисел. Задамо на площині декартову систему координат Oxy . Тоді кожному комплексному числу z , яке представлене в алгебраїчній формі $z = x + iy$, де x, y – дійсні числа; $i^2 = -1$, можна поставити у відповідність точку M з координатами (x, y) (рис. 3)

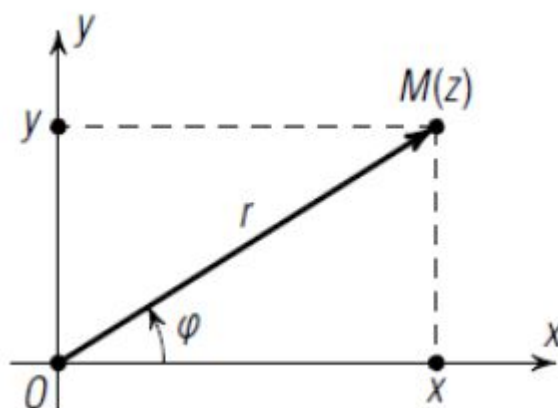


Рис. 3

Відстань від початкової точки O до точки $M(z)$ називається модулем комплексного числа z і позначається символом $|z|$ або r :

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Якщо φ – кут, то за означенням синуса та косинуса кута

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}; \cos\varphi = \frac{x}{r}, \text{ тоді } x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \text{ і тому } z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Геометричний зміст множення комплексних чисел. Множення двох комплексних чисел $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$

виконується за формулою:

$$ab = |a||b|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)),$$

$$\text{тобто } |ab| = |a||b| \text{ і } \arg(ab) = \arg a + \arg b.$$

Геометрично це означає, що точка $C(a, b)$ є образом точки $A(a)$ при композиції повороту з центром O на кут $\beta = \arg b$ і гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k = |b|$. (рис. 4). Оскільки $ba=ab$, точка $C(a, b)$ буде також образом точки $B(b)$ при композиції повороту з центром O на кут $\alpha = \arg a$ і гомотетією з центром O і коефіцієнтом $|a|$.

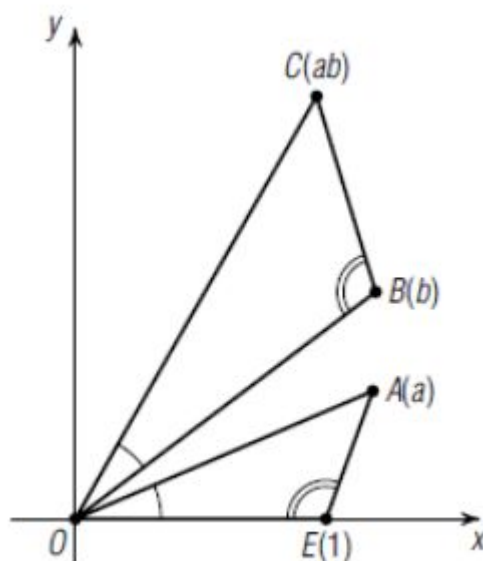


Рис. 4

Для побудови точки C зручно використати точку $E(1)$. Маємо:

$$\frac{|ab|}{|a|} = \frac{|b|}{1}; \angle EOA = \angle BOC = a, \quad \text{отже} \quad EOA \sim BOC, \quad \text{що дозволяє}$$

побудувати точку $C(a, b)$ по точках $A(a)$, $B(b)$, $E(1)$.

Якщо комплексне число a постійне, а комплексне число z змінне, то формула $z' = az$ – комутативна композиція повороту на кут $a = \arg a$ і гомотетією з коефіцієнтом $|a|$ з загальним центром O . Таке перетворення називається геометричним переворотом.

Отже, різні елементарні задачі з геометрії можна розв'язати швидко, використавши комплексні числа. Однак, не лише у стислості вирішення завдань полягає значення комплексних чисел, а й важливим є те, що при їх застосуванні при розв'язуванні задач виявляються нові деталі, можна зробити цікаві висновки, узагальнення та внести нові деталі, які дають підказки, аналізуючи отримані співвідношення та формули.

Комплексні числа також дозволяють представляти лінійні перетворення. Добуток матриці A і комплексного числа z дорівнює матриці $A \cdot z$. Таким чином, множення матриці A і комплексного числа z відповідає лінійному перетворенню радіус-вектора, який відповідає числу z . Ця властивість

комплексних чисел дозволяє використовувати їх для представлення лінійних перетворень в тривимірному просторі [16].

Розв'язування задач з комплексними числами є ефективним засобом підвищення математичної грамотності учнів. Це пов'язано з тим, що такі задачі вимагають від учнів застосування знань з різних галузей математики, зокрема, з алгебри, геометрії та тригонометрії [14].

Таблиця 1.2

**Можливості підвищення математичної грамотності учнів через
розв'язування задач з комплексними числами**

Напрямок	Реалізація
Розвиток математичного мислення	Творчий підхід до вирішення проблем. Учні повинні генерувати нові ідеї та підходи, а також використовувати вже відомі знання для вирішення нових завдань.
Удосконалення математичних навичок	Застосування різних математичних навичок, отриманих з арифметики, алгебри, геометрії та тригонометрії.
Розширення математичного кругозору	Нові математичні концепції та ідеї. Це сприяє розвитку математичного кругозору учнів та допомагає їм краще зрозуміти світ навколо них.

Ось деякі конкретні приклади задач з комплексними числами, які можуть використовуватися для підвищення математичної грамотності учнів:

- Задачі на знаходження коренів алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами (вимагають від учнів застосування методів розв'язання алгебраїчних рівнянь, а також розуміння властивостей комплексних чисел).
- Задачі на застосування комплексних чисел у геометрії (дозволяють учням побачити, як комплексні числа можуть використовуватися для опису геометричних об'єктів).

- Задачі на застосування комплексних чисел у тригонометрії (дозволяють учням удосконалити свої знання тригонометрії та побачити, як вона може використовуватися для розв'язання задач з комплексними числами).

Для того щоб розв'язування задач з комплексними числами було ефективним засобом підвищення математичної грамотності учнів, важливо, щоб задачі були цікавими та мотивуючими. Учні повинні бути зацікавлені в розв'язанні таких задач і розуміти, що ці задачі їм допомагають розвивати свої математичні навички та знання [7].

Вивчення операцій з комплексними числами сприяє розвитку аналітичних та геометричних навичок учнів.

Операції з комплексними числами включають в себе алгебраїчні операції, такі як додавання, віднімання, множення і ділення, а також тригонометричні операції, такі як спряження, модуль і аргумент. Вивчення цих операцій допомагає учням удосконалювати свої аналітичні навички, такі як:

- уміння використовувати математичні формули та поняття;
- уміння міркувати логічно та послідовно;
- уміння розв'язувати задачі за допомогою математичних методів.

Наприклад, для розв'язання задачі на знаходження коренів алгебраїчного рівняння з комплексними коефіцієнтами учням необхідно використовувати такі аналітичні навички, як:

- уміння застосовувати метод Руффіні-Гауса для розв'язання алгебраїчних рівнянь;
- уміння використовувати властивості комплексних чисел [13].

Комплексні числа можна використовувати для опису геометричних об'єктів, таких як точки, прямі, криві та многогранники. Вивчення операцій з комплексними числами допомагає учням удосконалювати свої геометричні навички, такі як:

- уміння уявити геометричні об'єкти в уяві.
- уміння застосовувати геометричні формули та поняття.
- уміння розв'язувати геометричні задачі.

Наприклад, для розв'язання задачі на знаходження відстані між двома точками, заданими комплексними числами, учням необхідно використовувати такі геометричні навички, як:

- уміння розуміти, як комплексні числа можна використовувати для представлення точок;
- уміння застосовувати формулу відстані між двома точками.

Для того щоб вивчення операцій з комплексними числами сприяло розвитку аналітичних та геометричних навичок учнів, важливо, щоб на уроках математики використовувалися різноманітні завдання, які вимагають від учнів застосування цих навичок [7].

Розв'язання задач, що вимагають використання комплексних чисел, може сприяти розвитку творчого мислення учнів. Це пов'язано з тим, що такі задачі часто не мають стандартних розв'язків і змушують учнів

- генерувати нові ідеї та підходи – учні повинні виходити за рамки стандартного мислення;
- використовувати різні математичні методи, спираючись на вже відомі знання;
- шукати зв'язки між різними галузями математики. Це допомагає учням мислити більш узагальнено і розвивати своє творче мислення в цілому [9].

Ось деякі конкретні приклади задач з комплексними числами, які можуть сприяти розвитку творчого мислення учнів:

- Задачі на знаходження геометричного сенсу комплексних чисел. Такі задачі вимагають від учнів розуміти, як комплексні числа можуть використовуватися для опису геометричних об'єктів.

- Задачі на застосування комплексних чисел у фізиці та інженерії. Такі задачі вимагають від учнів розуміти, як комплексні числа можуть бути використані для моделювання реальних явищ.

- Задачі на творче застосування комплексних чисел. Такі задачі вимагають від учнів використовувати свої творчі здібності для вирішення проблем.

Для того щоб розв'язання задач з комплексними числами сприяло розвитку творчого мислення учнів, важливо, щоб вчителі підбирали задачі, які відповідають інтересам і рівню підготовки учнів. Також важливо, щоб вчителі створювали атмосферу, яка сприяє творчому мисленню.

Вивчення операцій з комплексними числами у контексті компетентнісного навчання є важливим, оскільки сприяє розвитку таких ключових компетентностей учнів, як:

- Математична грамотність. Вивчення операцій з комплексними числами допомагає учням удосконалювати свої математичні навички та знання з арифметики, алгебри, геометрії та тригонометрії. Це дозволяє учням краще розуміти світ навколо них і застосовувати математику в практичних ситуаціях.

- Аналітичні навички. Вивчення операцій з комплексними числами допомагає учням удосконалювати свої аналітичні навички, такі як здатність логічно міркувати, використовувати математичні формули та поняття, а також розв'язувати задачі за допомогою математичних методів.

- Геометричні навички. Вивчення операцій з комплексними числами допомагає учням удосконалювати свої геометричні навички, такі як здатність уявити геометричні об'єкти в уяві, застосовувати геометричні формули та поняття, а також розв'язувати геометричні задачі.

- Творче мислення. Розв'язання задач, що вимагають використання комплексних чисел, може сприяти розвитку творчого мислення учнів. Це

пов'язано з тим, що такі задачі часто не мають стандартних рішень і вимагають від учнів пошуку нових підходів [33].

Для того щоб вивчення операцій з комплексними числами було ефективним у контексті компетентнісного навчання, важливо, щоб на уроках математики використовувалися різноманітні завдання, які вимагають від учнів застосування цих компетентностей.

1.3. Методика вивчення комплексних чисел у курсі алгебри та початків аналізу

У сучасному світі математика стала не лише знаряддям вирішення практичних завдань, але й основою для розвитку глибокого розуміння структур і концепцій, що відображають природу навколишнього світу. Однією з найцікавіших та водночас важливих математичних концепцій є вивчення комплексних чисел. Вони забезпечують можливість обробки великої кількості явищ, від аналізу хвильових процесів до моделювання фізичних систем.

Щоб повноцінно розкрити суть та значення комплексних чисел, необхідно зрозуміти їхнє методологічне підґрунтя. Відомо, що числа є ключовим інструментом для вимірювання та порівняння величин, проте комплексні числа виходять за межі цієї звичайної реальності, вводячи поняття уявних компонентів. Методологічна основа проблеми комплексних чисел полягає в аналізі та вивченні спеціальних математичних об'єктів, що мають відмінні властивості від дійсних чисел, і в їхньому використанні для моделювання складних фізичних, інженерних та соціальних явищ [23].

Тема комплексних чисел включена до навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів(профільний рівень). Ця тема вивчається у 11 класі і на неї за програмою відводиться 34 години. В цій темі учні розглядають такі поняття: множина комплексних чисел, геометрична

інтерпретація комплексного числа, алгебраїчна і тригонометрична форми запису комплексного числа, дії над комплексними числами в різних формах запису, формула Муавра, корінь n -го степеня з комплексного числа, многочлен та його корені, розклад многочлена на незвідні множники, кратні корені, основна теорема алгебри, теорема Вієта. [Многочлен третього степеня. Рівняння вищих степенів. Формула Кардано.] [19]

Включення теми комплексних чисел в навчальну програму має кілька важливих цілей і обґрунтовується наступними причинами:

Розширення числового поля: комплексні числа розширюють числове поле в математиці. Дійсні числа можуть бути розширені до комплексних чисел, які включають уявну одиницю " i " ($i = \sqrt{-1}$). Ця розширеність дозволяє розв'язувати різні рівняння, які не мають дійсних коренів.

Розв'язування квадратних рівнянь: комплексні числа дозволяють розв'язувати будь-яке квадратне рівняння. Навіть якщо дійсні корені відсутні, рівняння все одно має комплексні корені, що робить їхнє вивчення важливим у розумінні рівнянь і їх розв'язуванні.

Геометрична інтерпретація: комплексні числа можуть бути представлені на комплексній площині (також відомій як площина Арганді), де дійсна частина розташована на горизонтальній вісі, а уявна частина на вертикальній. Ця геометрична інтерпретація допомагає розуміти операції над комплексними числами і їхні властивості.

Застосування в фізиці та інших галузях: комплексні числа широко використовуються в різних галузях науки, зокрема в електроніці, акустиці, обробці сигналів, теорії квантової механіки, теорії керування, теорії чисел, інженерії і багатьох інших. Розуміння комплексних чисел є важливим для успішного вирішення завдань у цих галузях.

Розвиток абстрактного мислення: вивчення комплексних чисел сприяє розвитку абстрактного мислення та вмінню працювати з абстрактними

концепціями. Воно розвиває аналітичні та креативні навички учнів і підготовлює їх до розв'язування складних завдань.

Історичний контекст: розвиток комплексних чисел пов'язаний з історичними відкриттями і математичною розвідкою. Вивчення цієї теми дозволяє учням ознайомитися з історією математики та зробити свій внесок у розвиток математичних знань.

Включення теми комплексних чисел в навчальну програму має не лише теоретичну важливість, але й практичну значимість у різних галузях науки та інженерії, що робить її важливою для розвитку математичних навичок учнів.

Актуалізацію опорних знань і підготовку до вивчення комплексних чисел можна поділити на декілька етапів.

Актуалізація опорних знань. Перш ніж розпочати вивчення комплексних чисел, важливо переконатися, що учні мають добре розуміння дійсних чисел, зокрема раціональних та ірраціональних чисел, та вміють виконувати операції над ними.

Алгебраїчний підхід. На першому етапі вивчення комплексних чисел можна використовувати алгебраїчний підхід, представляючи комплексні числа у вигляді $a + bi$, де a – дійсна частина, b – уявна частина, і i – уявна одиниця. Пояснення цього підходу може включати демонстрацію операцій додавання та множення комплексних чисел.

Геометричний підхід. Геометричний підхід полягає в представленні комплексних чисел на комплексній площині, де дійсна частина розташована на горизонтальній вісі, а уявна частина – на вертикальній. В цьому підході можна наголосити на геометричних інтерпретаціях операцій над комплексними числами.

Аналітичний підхід. З аналітичної точки зору, комплексні числа можуть бути визначені як пари дійсних чисел (a, b) . З цього погляду можна показати, як виконувати алгебраїчні операції та розв'язувати рівняння, використовуючи це представлення.

Порівняння з дійсними числами. Під час вивчення комплексних чисел можна порівняти їх з дійсними числами, показавши, як комплексні числа розширюють число числового поля та дозволяють розв'язувати рівняння, які не мають дійсних коренів.

Порівняння з іншими математичними поняттями. Можна показати, як комплексні числа пов'язані з іншими математичними поняттями, такими як тригонометричні функції та експоненціальна форма комплексних чисел.

Залежно від рівня учнів можуть використовуватися різні підходи та комбінації зазначених вище методів для вивчення комплексних чисел. Головною метою є забезпечення того, щоб учні розуміли природу комплексних чисел, вміли виконувати операції та були готові до їхнього використання в різних математичних та фізичних задачах.

Отже, комплексні числа є потужним математичним інструментом, який має широкий спектр застосування. Для того, щоб повною мірою зрозуміти їхні властивості і застосування, необхідно мати глибоке розуміння методологічних аспектів цієї проблеми.

Алгебраїчний і геометричний підходи є основними методологічними інструментами для вивчення комплексних чисел. Вони дозволяють зрозуміти структуру і властивості комплексних чисел, інтерпретувати алгебраїчні операції з комплексними числами у геометричному вигляді, а також зрозуміти, як комплексні числа можуть використовуватися для розв'язання різних математичних задач і моделювання реальних явищ [2].

Висновки до розділу 1

Отже, теоретичні основи комплексних чисел та методика їх вивчення дозволяє отримати глибоке розуміння сутності комплексних чисел, їх властивостей та практичного застосування у контексті компетентнісного навчання. Визначено основні поняття та властивості комплексних чисел, що становлять фундамент для подальшого розгляду їх застосувань у різних галузях науки та техніки.

Розглянуто визначення комплексних чисел та наведено їх основні властивості, що дозволяють розкрити їх структуру та особливості. Ці основи вивчення виступають як важлива підготовка до подальшого вивчення практичних застосувань комплексних чисел.

Проаналізовано практичне значення комплексних чисел у контексті компетентнісного навчання. Виокремлені конкретні ситуації та завдання, де використання комплексних чисел має велике педагогічне та практичне значення для розвитку креативності та аналітичних здібностей учнів.

Представлено методику вивчення комплексних чисел у курсі алгебри та початків аналізу. Виділені ключові педагогічні підходи, які сприяють ефективному засвоєнню матеріалу учнями. Окреслені прийоми, які сприяють формуванню глибокого розуміння та практичних навичок у роботі з комплексними числами.

В цілому, теоретичні основи комплексних чисел та методика їх вивчення створює теоретичну та методичну базу для подальшого вивчення комплексних чисел у роботі з математичним матеріалом та викладанні наукових дисциплін. Здобуті знання та навички, розвинуті в рамках цього розділу, будуть корисні для подальшого вивчення математики та її застосувань у різних галузях.

РОЗДІЛ 2

ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕМИ «КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА»

2.1. Огляд задач шкільного курсу математики, що можуть бути розв'язані за допомогою комплексних чисел

Комплексні числа є потужним інструментом для розв'язання різних типів математичних задач. Використання комплексних чисел у шкільному курсі математики може мати низку переваг, зокрема уніфікацію та спрощення розв'язання деяких типів задач, а також надання додаткових можливостей для розв'язання певних типів задач. Однак, використання комплексних чисел вимагає від учнів певного рівня математичної підготовки та значного часу для вивчення.

За останні десятиліття з програми математики середньої школи в закладах середньої освіти, то включали, то виключали тему «Комплексні числа». Тому, можливо, з цих причин відсутній єдиний підхід до визначення комплексного числа і в багатьох випадках зручнішою є така форма запису комплексного числа, яка використовує наступну

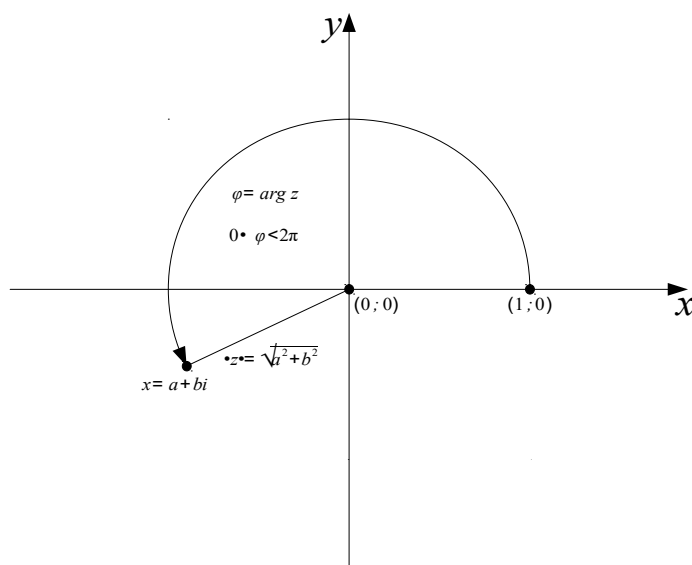


Рис. 5

геометричну інтерпретацію. Кожному числу $z = a + bi$ ставиться у відповідність точка з координатами $(a; b)$ в декартовій системі координат XOY . Таким чином встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і точками площини XOY (рис. 5); комплексному числу $0 + 0 \cdot i$ відповідає точка $(0; 0)$. Відстань від точки $(a; b)$ до початку координат дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2}$, тобто дорівнює $|z|$. Звідси

впливає, що величина $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками, які відповідають числам z_1 і z_2 .

Кут φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), який вимірюється у радіанах і відраховується проти годинникової стрілки від променя Ox до променя Oz , називається головним аргументом числа $z \neq 0$ і позначається $\arg z$. Величина цього кута може бути знайдена, якщо одночасно виконуються наступні умови:

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

або за формулами, якщо $z = a + bi$ і

- 1) $a > 0, b > 0$, то $\arg z = \arctg \frac{b}{a}$;
- 2) $a < 0, b > 0$, то $\arg z = \pi + \arctg \frac{b}{a}$;
- 3) $a < 0, b < 0$, то $\arg z = -\pi + \arctg \frac{b}{a}$;
- 4) $a > 0, b < 0$, то $\arg z = \arctg \frac{b}{a}$;
- 5) $a > 0, b = 0$, то $\arg z = 0$;
- 6) $a < 0, b = 0$, то $\arg z = \pi$;
- 7) $a = 0, b > 0$, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$;
- 8) $a = 0, b < 0$, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Аргументом комплексного числа z (позначається $\text{Arg } z$) називається будь-яке число виду $\arg z + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$ [32].

Приклад 1. Знайти всі значення аргументу числа $\alpha = -5$.

Розв'язання. Оскільки $a = \text{Re } \alpha = -5, b = \text{Im } \alpha = 0$, то розв'язками першого рівняння $\cos \varphi = -1$ системи є числа $\varphi = \pi + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$, а розв'язками другого рівняння $\sin \varphi = 0$ – числа $\varphi = \pi n, n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

В обох рівняннях числа $\varphi = \pi + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ є спільними коренями.

Відповідь: $\text{Arg}(-5) = \pi + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$.

Аргумент комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ можна знайти простіше: спочатку визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$ (використавши геометричну інтерпретацію комплексного числа), а потім скористатися одним (будь-яким) з рівнянь.

Приклад 2. Знайти всі значення аргументу комплексного числа $\alpha = -1 + i$.

Розв'язання. Оскільки $\text{Re}\alpha = -1, \text{Im}\alpha = 1$, то число $\alpha = -1 + i$ лежить у другій чверті. Друге з рівнянь має вигляд $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, яке лежить у другій чверті є одним із розв'язків даного рівняння.

Відповідь: $\text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$.

Приклад 3. Записати числа 1) $\alpha_1 = -1 - i$; 2) $\alpha_2 = i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. 1) Оскільки $|\alpha_1| = \sqrt{2}, \varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$, то $\alpha_1 = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

2) Оскільки $|\alpha_2| = 1$, а один із аргументів числа α_2 дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то $\alpha_2 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Записати числа 1) $a_1 = 2\cos \frac{7\pi}{4} - 2i\sin \frac{\pi}{4}$; 2) $a_2 = -\cos \frac{\pi}{17} + i\sin \frac{\pi}{17}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. Для запису чисел a_1 і a_2 у тригонометричній формі немає необхідності спочатку знайти їх модулі і аргументи. 1) Використаємо те, що $-\sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{7\pi}{4} \right)$. Тому $a_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

2) Аналогічно, $-\cos \frac{\pi}{17} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{17} \right) = \cos \left(\frac{16\pi}{17} \right)$, $\sin \frac{\pi}{17} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{17} \right) = \sin \left(\frac{16\pi}{17} \right)$. Тому $a_2 = \cos \frac{16\pi}{17} + i \sin \frac{16\pi}{17}$.

По-іншому можемо знайти аргументи комплексного числа. З формул (5) випливає, що кожен з аргументів задовольняє рівнянню $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Це рівняння не є рівносильним системі. Воно має більше розв'язків. Одержимо аргумент числа $\alpha = a + bi$, якщо спочатку визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$, а потім знайти розв'язок рівняння, який є кутом у цій чверті.

Приклад 5. Знайти один із аргументів числа $1 - i\sqrt{3}$.

Розв'язання. Точка $1 - i\sqrt{3}$ лежить у четвертій чверті. Знайдемо розв'язок рівняння $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$, який є кутом у цій чверті. Таким розв'язком є $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ [16].

При виконанні операції множення та ділення комплексних чисел зручно використати тригонометричну форму комплексного числа.

Якщо числа z_1 і z_2 подані у тригонометричній формі:

$$z_1 = |z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| ((\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ &\quad + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)) \end{aligned}$$

і, використовуючи формулу додавання для синуса і косинуса, отримаємо

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора \vec{z} проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2 , і розтягом його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_2| > 1$ див. рис. 6).

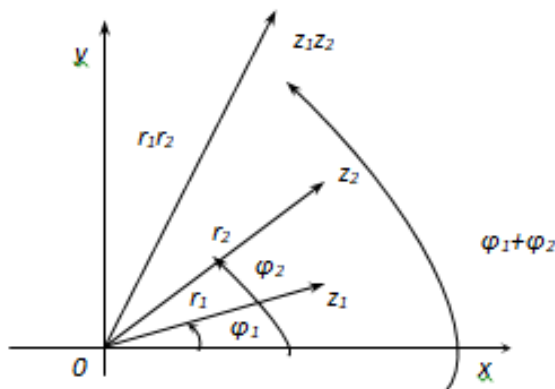


Рис. 6

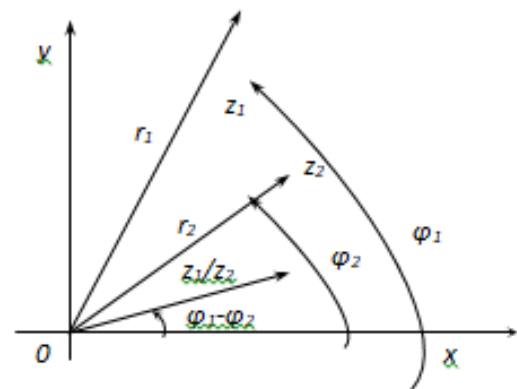


Рис. 7

Розглянемо операцію ділення комплексних чисел, що записані в тригонометричній формі. Помножимо чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 на $\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2$ і отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)}{|z_2|(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)} = \frac{|z_1|(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)}{|z_2|(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)(\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)} = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\frac{(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)}{\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2} + \frac{i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \sin \alpha_1)}{\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \end{aligned}$$

Отже, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$ [12].

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число z_1 , за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2 , і стиском його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_1| > 1$ див. рис. 7).

Для будь-якого натурального степеня числа z , матимемо $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.

Зокрема, якщо $|z| = 1$, то отримуємо формулу Муавра: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

Число w називається коренем степеня n ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) з комплексного числа z , якщо $w^n = z$. Таким чином, для знаходження всіх коренів степені n із числа z потрібно знайти всі розв'язки рівняння $w^n = z$. Якщо $z = 0$, то $w = 0$ – єдиний розв'язок. Якщо $z \neq 0$, то, записавши числа z і w у тригонометричній формі і використавши формулу Муавра, отримаємо рівність $w^n = z$ у вигляді $\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, де $w = \rho^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ [12].

Два комплексних числа, записаних у тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи відрізняються на $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Отже, $\rho^n = r$ і $n\varphi = \alpha + 2\pi k$, або $\rho = \sqrt[n]{r}$ і $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Таким чином, при $z \neq 0$ рівняння $w^n = z$ має рівно n різних коренів, які визначаються за формулами

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

З цього випливає, що всі числа w_k мають рівні модулі ($|w_k| = \sqrt[n]{r}$), але різні головні аргументи, які відрізняються один від одного на величину $2\pi k/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Аналогічно числа w_k відповідають точкам комплексної площини, розміщеним у вершинах деякого правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат [17].

Під символом $\sqrt[n]{a+bi}$ прийнято розуміти n чисел: z_0, z_1, \dots, z_{n-1} . Для знаходження значень $\sqrt[n]{a+bi}$ (де a і b – дійсні числа) інколи використовують не тригонометричну форму числа $a+bi$ і формулу Муавра, а саме означення кореня. Якщо $z = x + yi$ і $z^2 = a + bi$, то, прирівнявши дійсні та уявні частини, отримаємо систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$
 За двома розв'язками цієї системи $(x_0; y_0)$ і $(x_1; y_1)$ знаходимо два значення для $\sqrt[n]{a+bi}$: $z_0 = x_0 + iy_0$ і $z_1 = x_1 + iy_1$.

Приклад 6. Обчислити корені четвертого степеня з числа -1 .

Розв'язання. Число -1 у тригонометричній формі можна записати так:
 $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Корені четвертого степеня з числа -1 - це комплексні числа

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left(\frac{\cos(\pi+2\pi k)}{4} + \frac{i\sin(\pi+2\pi k)}{4} \right),$$

де $k = 0, 1, 2, 3$, тобто комплексні числа (рис. 8):

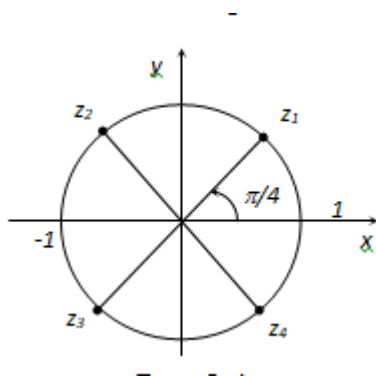


Рис. 8

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2(1+i)};$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2(-1+i)};$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2(-1-i)};$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2(1-i)}.$$

Аналогічно можна у множині комплексних чисел обчислити корінь n -го степеня з будь-якого дійсного числа. І з цього хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

У множині комплексних чисел кожне квадратне рівняння $z^2 + pz + q = 0$ з дійсними коефіцієнтами p і q має два (різних або однакових) корені, які знаходяться за формулами:

а) якщо $D = p^2 - 4q \geq 0$, то $z_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$, $z_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}$;

б) якщо $D < 0$, то $z_1 = \frac{-p+i\sqrt{|D|}}{2}$, $z_2 = \frac{-p-i\sqrt{|D|}}{2}$.

У множині комплексних чисел кожне кубічне рівняння $z^3 + pz + q = 0$ з дійсними коефіцієнтами p і q має три (різних або однакових) корені, які знаходяться за формулами Кардано:

$$\begin{cases} z = u + v, & uv = -\frac{p}{3} \\ u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \end{cases} \quad \text{де } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27};$$

Щоб звести загальне кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ до зведеного ($p = 0$), потрібно зробити заміну $t = z - \frac{p}{3}$.

Фундаментальне значення комплексних чисел для алгебри визначається в першу чергу тим, що будь-яке алгебраїчне рівняння $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) n -го степеня з дійсними чи комплексними коефіцієнтами має рівно n коренів (серед яких можуть бути і однакові); при цьому многочлен, який стоїть у лівій частині цього рівняння, завжди можна подати у вигляді $a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}$, де z_1, z_2, \dots, z_m — деякі різні комплексні числа, а k_1, k_2, \dots, k_m — натуральні числа, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Таким чином тільки числа z_1, z_2, \dots, z_m можуть бути коренями рівняння $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$; величини k_1, k_2, \dots, k_m відповідно визначають кратність коренів z_1, z_2, \dots, z_m .

Нехай z — комплексне число, модуль якого дорівнює 1, а аргумент дорівнює φ , $\varphi \in \mathbb{R}$, тобто $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тоді $\bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

Розглянемо наступні добуток, суму і різницю:

$$z \cdot \bar{z} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \cos^2 \varphi - i^2 \sin^2 \varphi =$$

$$= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

$$z + \bar{z} = \cos \varphi + i \sin \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi = 2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$z - \bar{z} = \cos \varphi + i \sin \varphi - \cos \varphi + i \sin \varphi = 2i \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Враховуюючи, що $\bar{z} = \frac{1}{z}$, дістанемо

$$\cos \varphi = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}; \quad \sin \varphi = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{z^2 - 1}{i(z^2 + 1)}; \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{i(z^2 + 1)}{z^2 - 1}.$$

За формулою Муавра: $z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Очевидно, що $|z^n| = \sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi} = \sqrt{1} = 1$. Тоді $\overline{z^n} = \cos n\varphi - i \sin n\varphi$ і $z^n \cdot \overline{z^n} = 1$.

$$z^n + \overline{z^n} = 2 \cos n\varphi \Rightarrow \cos n\varphi = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n};$$

$$z^n - \overline{z^n} = 2i \sin n\varphi \Rightarrow \sin n\varphi = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n};$$

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{z^{2n} - 1}{i(z^{2n} + 1)}; \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{i(z^{2n} + 1)}{z^{2n} - 1}.$$

Розглянемо рівняння виду:

$$\mathcal{R}(\sin n_i x, \cos m_j x, \operatorname{tg} p_k x, \operatorname{ctg} q_e x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

де $n_i, m_j, p_k, q_e \in \mathbb{N}$; $i, j, k, e = 1, 2, \dots$; $i, j, k, e \in \mathbb{N}$

За формулами подати кожен з тригонометричних функцій, що входить в дане рівняння через комплексне число z :

$$\cos m_j x = \frac{z^{2m_j} + 1}{2z^{m_j}}; \quad \sin n_i x = \frac{z^{2n_i} - 1}{2iz^{n_i}};$$

$$\operatorname{tg} p_k x = \frac{z^{2p_k} - 1}{i(z^{2p_k} + 1)}; \quad \operatorname{ctg} q_e x = \frac{i(z^{2q_e} + 1)}{z^{2q_e} - 1} [28].$$

Підставимо у дане рівняння введені функції комплексної змінної. Отримаємо дробово-раціональне рівняння комплексної змінної z з дійсними або комплексними коефіцієнтами.

Розв'язати отримане дробово-раціональне рівняння відносно z^p : $z^p = a \pm bi$, (або $z^p = \pm a + bi$), $p \in \mathbb{N}$.

Подати комплексне число z^p у вигляді $z^p = \cos px + i \sin px$, $p \in \mathbb{N}$.

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos px = a, \\ \sin px = \pm b \end{cases} \left(\text{або систему рівнянь: } \begin{cases} \cos px = \pm a, \\ \sin px = b \end{cases} \right) \quad \text{відносно } x.$$

(Оскільки $\cos^2 px + \sin^2 px = 1$, то $\exists x$: $\cos px = a$ і $\sin px = \pm b$ або відповідно $\cos px = \pm a$ і $\sin px = b$).

Записати відповідь.

Зауваження 1. Якщо $n_i, m_j, p_k, q_e \in \mathbb{Z}$ від'ємними цілими числами, то, враховуючи парність або непарність тригонометричних функцій, подаємо їх наступним чином:

$$\sin(-n_i x) = -\sin(n_i x); \cos(-m_j x) = \cos(m_j x)$$

$$\operatorname{tg}(-p_k x) = -\operatorname{tg}(p_k x); \operatorname{ctg}(-q_e x) = -\operatorname{ctg}(q_e x).$$

Зауваження 2. У межах даної роботи розглянуто тільки той випадок, коли $n_i, m_j, p_k, q_e \in \mathbb{N}$. Інакше, знаходження z^p стає досить складною задачею.

Зауваження 3. Розв'язками сукупності двох систем рівнянь: є ті значення, які задовольняють

$$\text{умову } \cos px = a \text{ (рис. 9)} \quad \left\| \begin{cases} \cos px = a, \\ \sin px = b; \\ \cos px = a, \\ \sin px = -b; \end{cases} \right. \text{Розв'язками}$$

сукупності двох систем рівнянь є ті значення, які задовольняють умову $\sin px = b$ (рис. 10)

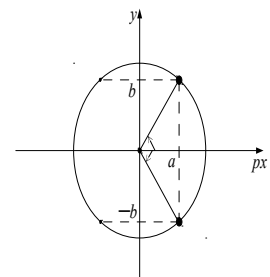


Рис. 9

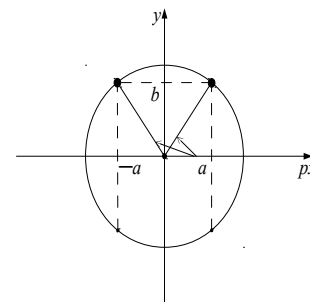


Рис. 10

$$\left[\begin{array}{l} \cos px = a, \\ \sin px = b; \\ \cos px = -a, \\ \sin px = b; \end{array} \right.$$

Зауваження 4. У межах даної роботи розглянуто лише деякі види тригонометричних рівнянь, які зводяться до алгебраїчних рівнянь комплексної змінної вищих степенів спеціального виду [11].

Проаналізуємо використання правила-орієнтира до розв'язування наступних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\cos 3x + 2\cos x = 0$.

І спосіб. Розв'яжемо дане рівняння засобами комплексних чисел.

$$\frac{z^6 + 1}{2zz^3} + 2\frac{z^2 + 1}{2z} = 0, z \neq 0$$

$$z^6 + 2z^4 + 2z^2 + 1 = 0, ((z^2)^3 + 1) + 2z^2(z^2 + 1) = 0$$

$$(z^2 + 1)(z^4 + z^2 + 1) = 0; z^2 = -1 \quad \text{або} \quad z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Оскільки $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$, то $\cos 2x = -1$ або $\cos 2x = -\frac{1}{2}$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ІІ спосіб. Розв'яжемо дане рівняння стандартним способом.

$$\cos 3x + \cos x + \cos x = 0; \quad 2 \cos 2x \cos x + \cos x = 0;$$

$$\cos x (2 \cos 2x + 1) = 0; \cos x = 0 \quad \text{або} \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Розглянемо рівняння виду

$$a \sin^3 x + b \sin x + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Знайдемо залежність між a , b та c , при якій дане рівняння зводиться до виду:

$$az^6 + mz^3 + n = 0, \quad a \in \mathbb{R}; \quad m, n \in \mathbb{C}.$$

$$a \left(\frac{z^2-1}{2iz} \right)^3 + b \frac{z^2-1}{2iz} + c = 0, \quad z \neq 0;$$

$$az^6 - z^4(3a + 4b) + z^2(3a + 4b) - 8icz^3 - a = 0$$

Отже, $3a + 4b = 0$; $a = -\frac{4}{3}b$.

Рівняння $az^6 - 8icz^3 - a = 0$ розв'язується заміною $z^3 = t$ [31].

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $4\sqrt{2} \sin^3 x - 3\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$

Розв'язання. $4\sqrt{2} \left(\frac{z^2-1}{2iz} \right)^3 + 3\sqrt{2} \frac{z^2-1}{2iz} + 1 = 0;$

$z^6 - \sqrt{2}iz^3 - 1 = 0$. Заміною $z^3 = t$ приходимо до рівняння:

$$t^2 - \sqrt{2}it - 1 = 0;$$

$$D = (\sqrt{2}i)^2 + 4 = -2 + 4 = 2; \quad t_{1,2} = \frac{\sqrt{2}i \pm \sqrt{2}}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$z^3 = \cos 3x + i \sin 3x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

Враховуючи зауваження 3 пункту 2.2, маємо:

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Аналогічно доводиться: рівняння $a \cos^3 x + b \cos x + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$ за умови $a = -\frac{4}{3}b$ зводиться до виду $az^6 + mz^3 + a = 0, \quad m = 8c$.

Інший спосіб розв'язування рівнянь є введення заміни $\sin x = y$ або відповідно $\cos x = y$, $y \in [-1; 1]$ і використання формул Кардано для знаходження розв'язків рівняння

$$y^3 + py + q = 0 \quad \left(p = \frac{b}{a}; q = \frac{c}{a}\right).$$

Але з використанням комплексних чисел такі рівняння розв'язуються простіше, оскільки не потребують знаходження трьох значень кожного з коренів кубічних: $\sqrt[3]{-\frac{a}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{a}{2} - \sqrt{D}}$, де $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Розглянемо рівняння виду

$$\cos nx = 2^n \cos^n x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За формулами маємо:

$$\frac{Z^{2n} + 1}{2Z^n} = 2^n \left(\frac{Z^2 + 1}{2Z} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \frac{Z^{2n} + 1}{2Z^n} = \frac{2^n (Z^2 + 1)^n}{2^n Z^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$Z^n \neq 0: \quad Z^{2n} + 1 - 2(Z^2 + 1)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Позначимо $Z^2 = t$, отримаємо рівняння: $t^n + 1 - 2(t + 1)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

За формулою бінома Ньютона:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \text{ де } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{0!n!} = 1, \text{ отримаємо:}$$

$$t^n + 1 - 2(t^n + C_n^1 t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} t^2 + C_n^{n-1} t + 1) = 0,$$

$$\text{або } 2t^n + 2C_n^1 t^{n-1} + 2C_n^2 t^{n-2} + \dots + 2C_n^{n-2} t^2 + 2C_n^{n-1} t + 2 - t^n - 1 = 0,$$

$$t^n + 2C_n^1 t^{n-1} + 2C_n^2 t^{n-2} + \dots + 2C_n^{n-2} t^2 + 2C_n^{n-1} t + 1 = 0.$$

Зважаючи на рівність біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

маємо, що $C_n^1 = C_n^{n-1}$, $C_n^2 = C_n^{n-2}$, Тобто ми отримали симетричне рівняння n -го степеня відносно комплексної змінної t з дійсними коефіцієнтами [12].

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $\cos 6x = 64 \cos^6 x$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{Z^{12} + 1}{2Z^6} = 2^6 \left(\frac{Z^2 + 1}{2Z} \right)^6, \quad Z \neq 0;$$

Отримане рівняння $z^{12} + 1 - 2(z^2 + 1)^6 = 0$ заміною $z^2 = t$ зводиться до рівняння $t^6 + 1 - 2(t + 1)^6 = 0$.

Коефіцієнти розкладу бінома $(t + 1)^6$ знайдемо з трикутника Паскаля:
 $t^6 + 1 - 2(t^6 + 6t^5 + 15t^4 + 20t^3 + 15t^2 + 6t + 1) = 0$;
 $t^6 + 12t^5 + 30t^4 + 40t^3 + 30t^2 + 12t + 1 = 0 \mid : t^3 \neq 0$;

$$t^3 + 12t^2 + 30t + 40 + \frac{30}{t} + \frac{12}{t^2} + \frac{1}{t^3} = 0;$$

$$t^3 + \frac{1}{t^3} + 12\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + 30\left(t + \frac{1}{t}\right) + 40 = 0.$$

Позначимо $t + \frac{1}{t} = y$, тоді $t^2 + \frac{1}{t^2} = y^2 - 2$ і $t^3 + \frac{1}{t^3} = y^3 - 3y$.

Маємо рівняння $y^3 - 3y + 12(y^2 - 2) + 30y + 40 = 0$,

$$y^3 + 12y^2 + 27y + 16 = 0, \text{ один із розв'язків якого } y = -1$$

Понизивши степінь маємо рівняння, коефіцієнти якого знаходимо за схемою Горнера:

$$y^2 + 11y + 16 = 0; \quad D = 121 - 4 \cdot 16 = 57; \quad y_1 = \frac{-11 - \sqrt{57}}{2}; y_2 = \frac{-11 + \sqrt{57}}{2};$$

$$\text{Отже, } t + \frac{1}{t} = -1 \text{ або } t + \frac{1}{t} = \frac{-11 - \sqrt{57}}{2}, \text{ або } t + \frac{1}{t} = \frac{-11 + \sqrt{57}}{2}.$$

Розв'яжемо рівняння $t + \frac{1}{t} = a, t \neq 0, a \in \mathbb{C}$.

$$t^2 - at + 1 = 0, \quad D = a^2 - 4; \quad t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

При $a = -1$: $t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Отже $Z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Враховуючи зауваження 3 пункту 2.2, маємо

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } a = \frac{-11 - \sqrt{57}}{2}: \quad t_1 = \frac{-11 - \sqrt{57}}{4} + \frac{\sqrt{81 + 11\sqrt{57}}}{4}, \quad t_2 = \frac{-11 - \sqrt{57}}{4} - \frac{\sqrt{81 + 11\sqrt{57}}}{4}.$$

Отримані значення t_1 і t_2 є числами виду: $a \pm 0i$. Оскільки $a^2 + 0^2 \neq 1$, при $a \neq 1$, то вони не задовольняють умову задачі.

При $a = \frac{-11+\sqrt{57}}{2}$: $t_1 = \frac{-11+\sqrt{57}}{4} \pm i \frac{\sqrt{11\sqrt{57}-81}}{4}$. За зауваженням 3 пункту 2.2, маємо $\cos 2x = \frac{-11+\sqrt{57}}{4}$; $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-11+\sqrt{57}}{4} \right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Слід звернути увагу, що це рівняння ще можна розв'язати, використавши тригонометричні формули потроєного аргументу і формули пониження степеня. Отримаємо рівняння $4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x = 8(1 + \cos 2x)^3$. Ввівши заміну $\cos 2x = t$, $t \in [-1; 1]$, приходимо до рівняння $4t^3 + 24t^2 + 27t + 8 = 0$.

Оскільки $t = -\frac{1}{2}$ – корінь рівняння, то його коефіцієнти ми знаходимо за схемою Горнера, попередньо понизивши степінь даного рівняння:

$$2t^2 + 11t + 8 = 0, \quad D = 121 - 64 = 57,$$

$$t_1 = \frac{-11-\sqrt{57}}{4} \notin [-1; 1]; \quad t_2 = \frac{-11+\sqrt{57}}{4} \in [-1; 1].$$

Повертаючись до заміни, отримаємо $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ або $\cos 2x = \frac{-11+\sqrt{57}}{4}$.

Отже, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ або $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-11+\sqrt{57}}{4} \right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-11+\sqrt{57}}{4} \right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо рівняння виду $\sin nx = 2^n \sin^n x$, $n \in \mathbb{N}$.

За формулами (2.1) і (2.4) отримаємо:

$$\frac{z^{2n-1}}{2iz^n} = 2^n \left(\frac{z^2-1}{2iz} \right)^n, n \in \mathbb{N}; \quad \frac{z^{2n-1}}{2iz^n} = 2^n \frac{(z^2+1)^n}{2^n i^n z^n}, n \in \mathbb{N}$$

$$(z^{2n} - 1)i^{n-1} = 2(z^2 - 1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $z^2 = t$, тоді маємо рівняння: $(t^n - 1)i^{n-1} = 2(t - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

За формулою бінома Ньютона отримаємо:

$$(t^n - 1)i^{n-1} - 2(t^n - C_n^1 t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} - C_n^3 t^{n-3} + \dots + (-1)^n) = 0$$

$$\text{або } t^n(i^{n-1} - 2) + 2C_n^1 t^{n-1} - 2C_n^2 t^{n-2} + 2C_n^3 t^{n-3} - \dots - i^{n-1} - 2(-1)^n = 0.$$

Зважаючи на рівність біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, і той факт, що $i^{n-1} - 2 = -(-i^{n-1} - 2(-1)^n)$, тобто $i^{n-1} - 2 = i^{n-1} + 2(-1)^n$, при $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, отримали косиметричне рівняння степеня $2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$ відносно комплексної змінної t з дійсними коефіцієнтами (випадок, коли $n = 1$ не розглядатимемо). Його розв'язками завжди є значення $t = 1$. Після пониження степеня отримуємо симетричне рівняння степеня $2m$, $m \in \mathbb{N}$, коефіцієнти при змінних якого знаходимо за схемою Горнера [14].

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $\sin 5x = 32 \sin^5 x$.

Розв'язання. $\frac{Z^{10}-1}{2iZ^5} = 2^5 \left(\frac{Z^2-1}{2iZ} \right)^5$.

Враховуючи, що $i^5 = (i^2)^2 i = i$, маємо $Z^{10} - 1 - 2(Z^2 - 1)^5 = 0$. Нехай $Z^2 = t$, тоді отримаємо рівняння: $t^5 - 1 - 2(t - 1)^5 = 0$. Коефіцієнти розкладу бінома $(t - 1)^5$ знайдемо з трикутника Паскаля, матимемо:

$$\begin{aligned} t^5 - 1 - 2(t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1) &= 0, \\ t^5 - 10t^4 + 20t^3 - 20t^2 + 10t - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Через те, що $t = 1$ – розв'язок рівняння, то, понизивши степінь рівняння, маємо симетричне рівняння 4-го степеня, коефіцієнти при змінних якого знаходимо за схемою Горнера: $t^4 - 9t^3 + 11t^2 - 9t + 1 = 0 \mid : t^2 \neq 0$

$$\left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) - 9 \left(t + \frac{1}{t} \right) + 11 = 0. \quad \text{Позначимо } t + \frac{1}{t} = y, \text{ тоді } t + \frac{1}{t} = y^2 - 2:$$

$$y^2 - 9y + 9 = 0; \quad D = 81 - 36 = 45; \quad \sqrt{D} = 3\sqrt{5}; \quad y_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \quad y_2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}.$$

Повертаємось до заміни: $t + \frac{1}{t} = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ або $t + \frac{1}{t} = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

Ми вже вказували, що коренями рівняння $t^2 - at + 1 = 0$ є значення $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

При $a = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$: $t_{1,2} = \frac{9-3\sqrt{5}}{4} \pm i \frac{\sqrt{27\sqrt{5}-55}}{4}$. При $a = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}$: $t_{1,2} = \frac{9+3\sqrt{5}}{4} \pm i \frac{\sqrt{27\sqrt{5}+55}}{4}$.

У наступному випадку значення t_1 і t_2 , які ми отримали є числа виду: $a \pm 0i$.

Оскільки $a^2 + 0^2 \neq 1$, при $a \neq 1$, то вони не задовольняють умову задачі.

З огляду на зауваження 3 пункту 2.2, отримаємо:

$$\cos 2x = 1 \quad \text{або} \quad \cos 2x = \frac{9-3\sqrt{5}}{4};$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пропонуємо розглянути комплексні числа у геометричних задачах. Найперше, охарактеризуємо поділ відрізка у заданому відношенні.

Теорема 1. Комплексна координата z середини відрізка AB знаходиться за формулою $z = \frac{z_1+z_2}{2}$, де z_1 і z_2 – комплексні координати точок A , B і C відповідно.

Доведення. Нехай C — середина відрізка AB , а z_1, z_2, z – комплексні координати точок A, B і C відповідно (рис. 11).

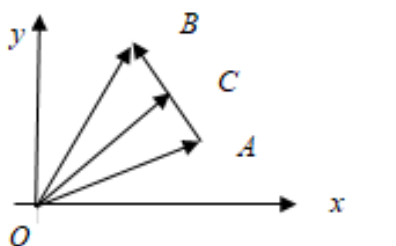


Рис. 11

Тоді із рівності

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

враховуючи, що вектори $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ і \overrightarrow{AB} мають комплексні координати z, z_1 і $z_2 - z_1$ відповідно, отримаємо

$$z = z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Зауваження. Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні α тобто $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \alpha$, то можна показати, що $z = \frac{z_1 + \alpha z_2}{1 + \alpha}$, де z, z_1 і z_2 — комплексні координати точок A, B, C відповідно.

Якщо говорити про відстань між двома точками:

Теорема 2. Відстань між точками A і B комплексної площини обчислюється за формулою $d = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, де $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ — комплексні координати точок A і B .

Доведення. Відстань між точками A і B дорівнює довжині вектора \overrightarrow{AB} , який має комплексну координату $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i$ (рис. 2.3).

$$\text{Тому } d = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Теорема 3. Рівняння кола з центром у точці z_0 радіуса R має вигляд $|z - z_0| = R$.

Доведення. Згідно з означенням, коло з центром у точці z_0 радіуса R — це множина точок z площини, віддалених від заданої точки z_0 на відстань R , тобто це множина точок z таких, що $|z - z_0| = R$.

Наслідок. Рівняння кола з центром у точці $z_0 = 0$ радіуса R має вигляд $|z| = R$

Задача 1. Знайдіть множину точок комплексної площини за заданими умовами:

$$\text{а) } |z - 2 + i| = 3; \text{ б) } |z - z_0| < R; \text{ в) } |z - z_0| \geq R.$$

Розв'язання.

а) Дане рівняння задає коло з центром у точці $z_0 = 2 - i$ і радіуса 3.

б) Дана нерівність означає, що шукані точки z віддалені від точки z_0 на відстань меншу за R . Тобто даною нерівністю описуються внутрішні точки круга радіуса R з центром у точці z_0 , при цьому точки відповідного кола цій множині не належать (рис. 12).

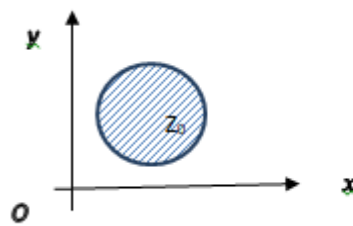


Рис. 12

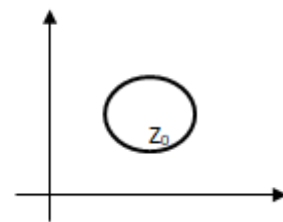


Рис. 13

в) Шукані точки z віддалені від точки z_0 на відстань, більшу або рівну R . Це означає, що вони лежать зовні кола радіуса R з центром у точці z_0 або на цьому колі (рис. 13).

Теорема 4. Рівняння прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає точки z_1 та z_2 , $z_1 \neq z_2$ і проходить через його середину, має вигляд

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

Доведення. Нехай $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, а $z = x + yi$ — довільна точка шуканої прямої. Як відомо з геометрії, всі точки z , для яких $|z - z_1| = |z - z_2|$, є рівновіддаленими від точок та z_1 та z_2 , і тому лежать на прямій, перпендикулярній до відрізка, що сполучає ці точки, і проходить через його середину. Навпаки, всі точки прямої, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає дві точки z_1 та z_2 і проходить через його середину, є рівновіддаленими від точок z_1 та z_2 і тому задовольняють рівняння $|z - z_1| = |z - z_2|$.

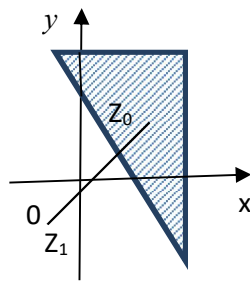


Рис. 14

Задача 2. Знайти множину точок площини, які задовольняють нерівність

$$|z - z_1| > |z - z_2|.$$

Зразок міркувань. Рівність $|z - z_1| = |z - z_2|$ є рівнянням прямої k , перпендикулярної

до відрізка, що сполучає точки z_1 і z_2 , і проходить через його середину. Пряма k розбиває площину на дві півплощини, кожна з яких містить або точку z_1 , або точку z_2 . Відстань від довільної точки z півплощини, що містить z_2 , до точки z_2 завжди буде меншою за відстань до точки z_1 . Тобто задана нерівність визначає ту півплощину, яка містить z_2 . причому точки прямої шуканій множині не належать (рис. 14).

Зауваження. У подібних нерівностях визначальною є точка (z_1 або z_2), яка міститься у меншому з двох модулів, тобто шуканою є та частина площини, яка містить точку меншого модуля [31].

Задача 3. За допомогою рівнянь або нерівностей запишіть такі множини точок комплексної площини:

- а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;
- б) півплощину, розташовану над дійсною віссю;
- в) четверту чверть координатної площини;
- г) смугу, шириною π і паралельну осі Oy ;
- г) точки, розміщені зовні кола радіуса 2 і з центром у точці $1 - i$;
- д) бісектрису I і III координатних кутів;
- е) пряму Ox ; —
- є) бісектрису кута $z_1 O z_2$, де $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Відповіді: а) $\operatorname{Re} z < 0$; б) $\operatorname{Im} z$; в) $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0$; г) $x_0 < \operatorname{Re} z < x_0 + \pi$, x_0 — довільне дійсне число; г) $|z - 1 + i| > 2$; д) $|z - 1| = |z - i|$; е) $|z - i| = |z + i|$; є) $|z - 2 + i| = |z - 1 - 2i|$

Задача 4. Нехай комплексні координати вершин трикутника ABC відповідно рівні $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -1 - i, z_3 = -2 - 2i$. Знайдіть комплексні координати його медіан.

Зразок міркувань.

Середини сторін даного трикутника мають комплексні координати:

$$M_1 \left(\frac{z_2 + z_3}{2} \right), M_2 \left(\frac{z_1 + z_3}{2} \right), M_3 \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right), \text{ тобто } M_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right), M_2 \left(\frac{3}{2} \right), M_3 \left(\frac{i}{2} \right).$$

$$\text{Тоді медіани трикутника матимуть такі координати: } \overrightarrow{Z_1 M_1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i \right), \overrightarrow{Z_2 M_2} \left(\frac{5}{2} + i \right), \overrightarrow{Z_3 M_3} \left(-2 + \frac{5}{2}i \right).$$

Задача 5. Довести, що якщо у площині паралелограму ABCD існує точка X, що $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$, то ABCD – прямокутник.

Зразок міркувань

Візьмемо за початок координат точку O – центр паралелограму (рис.15). Нехай точки A, B, C, D, X відповідають комплексним числам z_1, z_2, z_3, z_4, z , відповідно. Тоді, очевидно,

$$z_1 = -z_3; z_2 = -z_4. \quad (2.10)$$

Далі, за умовою:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = |z - z_2|^2 + |z - z_4|^2,$$

тобто, враховуючи (2.10),

$$|z_1|^2 = |z_2|^2.$$

Отже, діагоналі паралелограму ABCD рівні, тобто він є прямокутником, що й вимагалось довести.

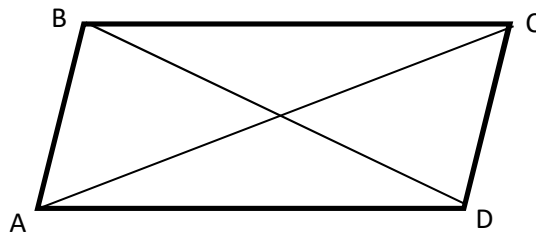


Рис. 15

Задача 6. У колі проведено два перпендикулярних радіуси OA та OB . На дузі AB взята довільна точка X . Прямі, що з'єднують X з точками A та B , перетинають прямі, відповідно, OB та OA в точках B_1 та A_1 . Знайти

$$\beta = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}}, \text{ якщо } \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \alpha.$$

Зразок міркувань.

Нехай, для визначеності, система координат вибрана так, що коло, яке обмежує даний круг, одиничне ($z\bar{z}=1$), а точки розташовані так, як показано на рис. 16:

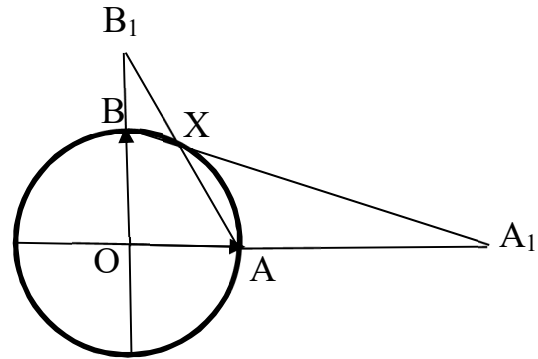


Рис. 16

$$A(1); B(i); X(x).$$

Тоді, за умовою, точкам A_1 та B_1 відповідають числа α та βi . З колінеарності точок A, X, B_1 та B, X, A_1 :

$$x = p + (1 - p)\beta i, \quad x = qi + (1 - q)\alpha,$$

де $p, q \in [0; 1]$. Тоді, з умови рівностей комплексних чисел:

$$p = (1 - q)\alpha, \quad q = (1 - p)\beta,$$

$$\text{Тобто } p = \frac{\alpha - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}; \quad q = \frac{\beta - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}.$$

Отже, з рівностей та маємо:

$$x = \frac{\alpha - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta} + \frac{\beta - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}i,$$

але оскільки точка X лежить на одиничному колі, то маємо:

$$1 = |x|^2 = \frac{\alpha^2(1 - \beta)^2 + \beta^2(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha\beta)^2}.$$

$$(1 - \alpha\beta)^2 - \alpha^2(1 - \beta)^2 - \beta^2(1 - \alpha)^2 = 0.$$

Звідси після спрощення дістанемо рівняння:

$$1 - 2\alpha\beta - \alpha^2 + 2\alpha^2\beta - \alpha^2\beta^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta^2 = 0;$$

$$((\alpha - 1)\beta^2) - 2\alpha\beta + \alpha + 1)(\alpha - 1) = 0.$$

Розв'язуючи його відносно β та враховуючи, що $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$, дістанемо, що

$$\beta = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Задача 7. На сторонах чотирикутника ABCD побудовані однаконо орієнтовані рівнобедрені прямокутні трикутники ABM, BCN, CDP, DAQ. Довести, що середини відрізків MP та NQ та середини діагоналей чотирикутника є вершинами квадрата.

Зразок міркувань

Вершинам чотирикутника ABCD поставимо у відповідність числа a, b, c, d . Якщо точці M відповідає число m , то, оскільки трикутник AMB рівнобедрений та прямокутний, вектор \overline{BM} можна дістати з вектора \overline{AM} поворотом на 90° (детальніше про це дивись нижче), тобто $a - m = (b - m)i; m = \frac{a-bi}{1-i}$.

Аналогічно:

$$n = \frac{b-ci}{1-i}; p = \frac{c-di}{1-i}; q = \frac{d-ai}{1-i}.$$

Серединам R та S відрізків MP та NQ відповідають числа

$$r = \frac{a+c-i(b+d)}{2(1-i)}; s = \frac{b+d-i(a+c)}{2(1-i)}.$$

Якщо на відрізку RS, як на діагоналі, побудувати квадрат URVS, то

$$v = \frac{r-is}{1-i} = \frac{2i(b+d)}{2(1-i)^2} = \frac{b+d}{2}; u = \frac{s-ir}{1-i} = \frac{a+c}{2}.$$

З отриманих формул видно, що точки U та V – середини діагоналей даного чотирикутника, і задача розв'язана.

Задача 8. Довести, що середини сторін довільного чотирикутника утворюють паралелограм.

Зразок міркувань

Нехай вершинам A,B,C,D даного (не обов'язково опуклого) чотирикутника ABCD відповідають комплексні числа z_1, z_2, z_3, z_4 . Тоді

точкам M_1, M_2, M_3, M_4 – серединам сторін AB, BC, CD, DA – відповідають числа $\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}, \frac{z_4+z_1}{2}$.

Перевіримо виконання умови паралельності векторів $\overline{M_1M_2}$ та $\overline{M_3M_4}$.

Маємо:

$$\left(\frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_2+z_3}{2}\right) \left(\frac{\overline{z_3+z_4}}{2} - \frac{\overline{z_4+z_1}}{2}\right) = \frac{z_1-z_3}{2} \frac{\overline{z_3-z_1}}{2} = -\frac{1}{4}|z_3-z_1|^2;$$

$$\left(\frac{z_3+z_4}{2} - \frac{z_4+z_1}{2}\right) \left(\frac{\overline{z_1+z_2}}{2} - \frac{\overline{z_2+z_3}}{2}\right) = \frac{z_3-z_1}{2} \frac{\overline{z_1-z_3}}{2} = -\frac{1}{4}|z_3-z_1|^2.$$

Аналогічно можна показати, що вектори $\overline{M_2M_3}$ та $\overline{M_1M_4}$ також паралельні, що доводить твердження задачі.

Задача 9. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

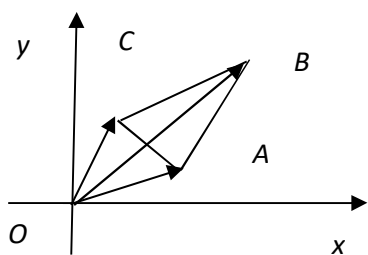


Рис. 17

Зразок міркувань.

Введемо систему координат так, як показано на рис. 17. Нехай z_1 і z_2 — комплексні координати двох вершин A і C паралелограма $OABC$. Тоді $z = z_1 + z_2$ —

комплексна координата третьої вершини — точки B . Тоді

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 &= |z_2 - z_1|^2 + |z_1 + z_2|^2 = (z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1}) + \\ &+ (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - \\ &- z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} = 2(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = \\ &= 2(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2). \end{aligned}$$

Комплексні числа є одним із найважливіших понять у математиці. Вони мають широке застосування в різних галузях науки і техніки, зокрема в фізиці, електротехніці, механіці, геометрії, алгебрі.

У шкільному курсі математики комплексні числа вивчаються у 11 класі за програмою з поглибленим вивченням. У цьому курсі розглядаються

основні поняття та властивості комплексних чисел, а також їх застосування для розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь та нерівностей.

Розгляд цих задач покаже, що комплексні числа можуть бути використані для уніфікації та спрощення розв'язання багатьох задач, а також для розв'язання задач, які взагалі не можуть бути розв'язані без використання комплексних чисел.

Зазвичай розв'язування квадратних рівнянь, у яких дискримінант від'ємний, неможливе. Однак, завдяки комплексним числам, такі рівняння можна розв'язати досить просто [2].

Переваги використання комплексних чисел у розв'язанні квадратних рівнянь:

- Уніфікація розв'язання. Використання комплексних чисел дозволяє уніфікувати розв'язання квадратних рівнянь, незалежно від знаку дискримінанта.
- Повнота розв'язку. Квадратне рівняння зазвичай має два розв'язки, але іноді вони можуть бути комплексними числами. Використання комплексних чисел дозволяє повністю враховувати всі можливі розв'язки, включаючи ті, які не є дійсними числами.
- Додаткові можливості. Комплексні числа дозволяють розв'язати деякі квадратні рівняння, які взагалі не можна розв'язати за допомогою дійсних чисел [15].

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c - комплексні числа. Дискримінант цього рівняння дорівнює:

$$b^2 - 4ac$$

Якщо дискримінант від'ємний, то:

$$b^2 - 4ac < 0$$

У цьому випадку, квадратне рівняння має два комплексних корені:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Відповідно до теореми Вієта, сума коренів квадратного рівняння дорівнюють $-ab$, а їх добуток дорівнює ac . Для комплексних чисел, ці співвідношення також виконуються.

Розв'яжемо квадратне рівняння $z^2 - 2iz + 5 = 0$.

Дискримінант цього рівняння дорівнює:

$$(-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння має два комплексних корені:

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1}$$

Розв'язавши квадратне рівняння підкореневого виразу, отримаємо:

$$z = i \pm 2i$$

Отже, корені квадратного рівняння $z^2 - 2iz + 5 = 0$ дорівнюють $i + 2i$ і $i - 2i$.

Давайте розглянемо окремі приклади з шкільного курсу математики (11 клас) [1].

Приклад 1

Розв'яжемо квадратне рівняння $3z^2 - 2z + 1 = 0$.

Дискримінант цього рівняння дорівнює:

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -6$$

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння має два комплексних корені:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{-6}}{6}$$

Розв'язавши квадратне рівняння підкореневого виразу, отримаємо:

$$z = \frac{2 \pm i\sqrt{6}}{6}$$

Отже, корені квадратного рівняння $3z^2 - 2z + 1 = 0$ дорівнюють $z = \frac{2+i\sqrt{6}}{6}$ та $z = \frac{2-i\sqrt{6}}{6}$ [11].

Приклад 2

Розв'яжемо квадратне рівняння $3z^2 + 4iz + 5 = 0$.

Дискримінант цього рівняння дорівнює:

$$(4i)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -76$$

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння має два комплексних корені:

$$z = \frac{-4i \pm \sqrt{-76}}{2 \cdot 3}$$

Розв'язавши квадратне рівняння підкореневого виразу, отримаємо:

$$z = -\frac{2i \pm 2i\sqrt{19}}{3}$$

Отже, корені квадратного рівняння $3z^2 + 4iz + 5 = 0$ дорівнюють $z = -\frac{2i+2i\sqrt{19}}{3}$ та $z = -\frac{2i-2i\sqrt{19}}{3}$ [12].

Приклад 3

Розв'яжемо квадратне рівняння $(2i - 1)z^2 + (i + 1)z + 2i = 0$.

Дискримінант цього рівняння дорівнює:

$$(i + 1)^2 - 4 \cdot (2i - 1) \cdot 2i = -17$$

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння має два комплексних корені:

$$z = \frac{-(i + 1) \pm \sqrt{-17}}{4i - 2}$$

Розв'язавши квадратне рівняння підкореневого виразу, отримаємо:

$$z = \frac{-i - 1 \pm i\sqrt{17}}{2}$$

Отже, корені квадратного рівняння $(2i - 1)z^2 + (i + 1)z + 2i = 0$ дорівнюють

$$z = \frac{-i-1+i\sqrt{17}}{2} \text{ та } z = \frac{-i-1-i\sqrt{17}}{2} [12].$$

Ці приклади показують, що використання комплексних чисел дозволяє розв'язати квадратні рівняння, у яких дискримінант від'ємний, досить просто і швидко.

Тригонометричні рівняння є одним із найважливіших видів рівнянь у шкільному курсі математики. Вони широко застосовуються в різних галузях науки і техніки, зокрема в фізиці, електротехніці, механіці, геометрії.

Зазвичай розв'язання тригонометричних рівнянь зводиться до знаходження значень тригонометричних функцій для деяких аргументів. Однак, у деяких випадках це буває досить складно.

Комплексні числа можуть бути використані для спрощення розв'язання тригонометричних рівнянь. Це пов'язано з тим, що тригонометричні функції для комплексних аргументів мають прості аналітичні вирази.

Розглянемо тригонометричний рівняння $\sin(x) = 1$. Це рівняння має два корені: $x = 2\pi$ і $x = -2\pi$.

Для розв'язання цього рівняння за допомогою комплексних чисел ми можемо записати його у вигляді:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2}$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на $2i$, отримаємо:

$$2 \sin(x) = e^{ix} + e^{-ix}$$

Тепер, використовуючи формулу Ейлера, можемо переписати це рівняння у вигляді:

$$2i\sin(x) = e^{ix} - e^{-ix} = 2\cos(x)i$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на $2i$, отримаємо:

$$\sin(x) = \cos(x)$$

Це рівняння має два корені: $x = \frac{\pi}{2}$ і $x = -\frac{\pi}{2}$

Як бачимо, розв'язання тригонометричного рівняння $\sin(x) = 1$ за допомогою комплексних чисел виявилось досить простим.

Розглянемо задачу на обчислення значення тригонометричної функції для комплексного аргументу [13].

Задача: Знайти значення функції $\sin(i)$.

Розв'язання:

$$\sin(i) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2} = \frac{i - (-i)}{2} = i$$

Цей результат можна обґрунтувати, використовуючи формулу Ейлера.

Задача: Знайти значення функції $\cos(i)$.

Розв'язання:

$$\cos(i) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2} = \frac{i + (-i)}{2} = 0$$

Цей результат також можна обґрунтувати, використовуючи формулу Ейлера.

Використання комплексних чисел для розв'язання тригонометричних рівнянь та обчислення значень тригонометричних функцій для комплексних аргументів дозволяє розв'язати такі задачі швидко та просто [1].

Задача 1

Знайти значення функції $\sin(3i)$.

Розв'язання:

$$\sin(3i) = \frac{e^{\frac{3i\pi}{2}} - e^{-\frac{3i\pi}{2}}}{2} = \frac{3i - (-3i)}{2} = 3i$$

Задача 2

Знайти значення функції $\cos(2i)$.

Розв'язання:

$$\cos(2i) = \frac{e^{\frac{2i\pi}{2}} + e^{-\frac{2i\pi}{2}}}{2} = \frac{2i + (-2i)}{2} = 0$$

Задача 3

Знайти значення функції $\tan(i)$.

Розв'язання:

$$\tan(i) = \frac{\sin(i)}{\cos(i)} = \frac{i}{0} = \infty$$

Задача 4

Знайти значення функції $\cot(i)$.

Розв'язання:

$$\cot(i) = \frac{1}{\tan(i)} = \frac{0}{i} = 0$$

Задача 5

Знайти значення функції $\sec(i)$.

Розв'язання:

$$\sec(i) = \frac{1}{\cos(i)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Задача 6

Знайти значення функції $\csc(i)$.

Розв'язання:

$$\operatorname{csc}(i) = \frac{1}{\sin(i)} = \frac{1}{i} = -i \quad [17].$$

Ці приклади показують, що використання формули Ейлера дозволяє швидко та просто обчислювати значення тригонометричних функцій для комплексних аргументів.

Комплексні числа можна використовувати для вирішення різних геометричних задач, зокрема задач на рух та обертання об'єктів на комплексній площині.

Рух об'єкта на комплексній площині можна описати за допомогою функції $z(t)$, де t - час. Ця функція визначає положення об'єкта в заданий момент часу.

Наприклад, рух об'єкта зі сталою швидкістю v в напрямку кута θ можна описати функцією:

$$z(t) = v \cos(\theta) + vi \sin(\theta)$$

Ця функція описує коло радіуса v з центром в точці $(0,0)$.

Обертання об'єкта на комплексній площині можна описати за допомогою функції $z(t) = e^{it} z_0$, де z_0 - початкове положення об'єкта, а t - кут обертання.

Ця функція описує обертання об'єкта на кут t навколо початку координат [1].

Задача 1

Об'єкт рухається зі сталою швидкістю 2 в напрямку кута 3π . Знайти положення об'єкта через 2 секунди.

Розв'язання:

Положення об'єкта через 2 секунди визначається функцією:

$$z(2) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2i$$

Задача 2

Об'єкт обертається на кут 2π навколо початку координат. Знайти положення об'єкта після обертання.

Розв'язання:

Положення об'єкта після обертання визначається функцією:

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} z_0 = i \cdot z_0 = iz_0 \quad [31].$$

Ці приклади показують, що комплексні числа можуть використовуватися для вирішення різних геометричних задач, зокрема задач на рух та обертання об'єктів на комплексній площині.

2.2. Система практичних завдань на застосування комплексних чисел у різних галузях науки

Розглянемо приклади задач, які можуть бути розв'язані за допомогою комплексних чисел, та способи їх доступного пояснення учням. Від простих задач на розв'язання квадратних рівнянь до складніших завдань, пов'язаних з геометрією та тригонометрією, комплексні числа допоможуть нам розкрити глибини математичного аналізу та показати, як цей інструмент може бути корисним у реальному житті.

На уроках алгебри в 10-11 класі можна використовувати наступні типи завдань.

- Розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – комплексні числа.
1. Розв'язати квадратне рівняння $z^2 + 2iz + 1 = 0$.
 2. Розв'язати квадратне рівняння $z^2 - 3iz + 2 = 0$.
 3. Розв'язати квадратне рівняння $z^2 + 3z + 2 = 0$.
 4. Розв'язати квадратне рівняння $z^2 - 3z - 2 = 0$.
 5. Розв'язати квадратне рівняння $z^2 + 4iz + 4 = 0$.

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання квадратних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Однак, у цих задачах коефіцієнти є комплексними числами.

- Обчислити значення тригонометричних функцій для комплексних аргументів.

1. Знайти значення функції $\sin(i)$.
2. Знайти значення функції $\cos(i)$.
3. Знайти значення функції $\tan(i)$.
4. Знайти значення функції $\cot(i)$.
5. Знайти значення функції $\sec(i)$.

Ці завдання є аналогічними задачам на обчислення значень тригонометричних функцій для дійсних аргументів. Однак, у цих задачах аргументи є комплексними числами. Для обчислення значень тригонометричних функцій для комплексних аргументів можна використовувати формулу Ейлера: $eiz = \cos(z) + i\sin(z)$

Ця формула дозволяє отримати зв'язок між тригонометричними функціями та комплексними числами.

- Розв'язати системи лінійних рівнянь з комплексними коефіцієнтами.

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} z + iy - 2 = 0 \\ 2z + y + 1 = 0 \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} z - 2i - 3 = 0 \\ 2z + 3i - 1 = 0 \end{cases}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} z - 3i + 2 = 0 \\ 2z + 3i + 1 = 0 \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} z - 3i - 1 = 0 \\ 2z + 3i - 2 = 0 \end{cases}$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} z + 4i + 4 = 0 \\ 2z + 4i + 2 = 0 \end{cases}$$

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання систем лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Однак, у цих задачах коефіцієнти є комплексними числами. Для розв'язання таких задач можна використовувати метод Гауса, метод Гаусса-Жордана або метод Крамера.

● Розв'язати нерівності з комплексними числами.

1. Розв'язати нерівність $|z - 1| \leq 2$.
2. Розв'язати нерівність $|z + 2i| \geq 3$.
3. Розв'язати нерівність $|z| \leq 1$.
4. Розв'язати нерівність $|z| \geq 2$.
5. Розв'язати нерівність $|z - 1| + |z + 2i| \leq 5$.

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання нерівностей з дійсними числами. Однак, у цих задачах нерівності містять комплексні числа. Для розв'язання таких задач можна використовувати метод геометричного зображення комплексних чисел.

Наприклад, нерівність $|z - 1| \leq 2$ можна розв'язати, побудувавши коло з центром в точці 1 і радіусом 2. Зона, обмежена цим колом, відповідає розв'язкам цієї нерівності.

Окремо варто розглянути тригонометричні завдання.

● Розв'язати тригонометричні рівняння з комплексними коефіцієнтами.

1. Розв'язати рівняння $\sin(iz) = 1$.
2. Розв'язати рівняння $\cos(iz) = i$.
3. Розв'язати рівняння $\tan(iz) = 1$.
4. Розв'язати рівняння $\cot(iz) = i$.
5. Розв'язати рівняння $\sec(iz) = 1$.

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання тригонометричних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Однак, у цих задачах коефіцієнти є

комплексними числами. Для розв'язання таких задач можна використовувати формулу Ейлера: $eiz = \cos(z) + i\sin(z)$

Ця формула дозволяє отримати зв'язок між тригонометричними функціями та комплексними числами.

- Обчислити значення тригонометричних функцій для комплексних аргументів.

1. Знайти значення функції $\sin(i)$.
2. Знайти значення функції $\cos(i)$.
3. Знайти значення функції $\tan(i)$.
4. Знайти значення функції $\cot(i)$.
5. Знайти значення функції $\sec(i)$.

Ці завдання є аналогічними задачам на обчислення значень тригонометричних функцій для дійсних аргументів. Однак, у цих задачах аргументи є комплексними числами. Для обчислення значень тригонометричних функцій для комплексних аргументів можна використовувати формулу Ейлера: $eiz = \cos(z) + i\sin(z)$

Ця формула дозволяє отримати зв'язок між тригонометричними функціями та комплексними числами.

Наприклад, значення функції $\sin(i)$ можна обчислити, використовуючи формулу Ейлера:

$$e i \pi = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$$

Отже, $\sin(i) = -1$.

Наявність таких задач у шкільному курсі математики дозволяє учням розвивати логічне мислення, а також усвідомлювати зв'язок між дійсними і комплексними числами.

- Розв'язати тригонометричні нерівності з комплексними числами.

1. Розв'язати нерівність $\sin(iz) \geq 0$.
2. Розв'язати нерівність $\cos(iz) \leq 0$.

3. Розв'язати нерівність $\tan(iz) \leq 0$.
4. Розв'язати нерівність $\cot(iz) \leq 0$.
5. Розв'язати нерівність $\sec(iz) \leq 0$.

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання тригонометричних нерівностей з дійсними числами. Однак, у цих задачах аргументи є комплексними числами. Для розв'язання таких задач можна використовувати формулу Ейлера: $eiz = \cos(z) + i\sin(z)$

Ця формула дозволяє отримати зв'язок між тригонометричними функціями та комплексними числами.

Наприклад, нерівність $\sin(iz) \geq 0$ можна розв'язати, використовуючи формулу Ейлера: $\cos(z) + i\sin(z) \geq 0$

Це нерівність має розв'язки, які відповідають множині точок, розташованих в півплощині, де $\sin(z) \geq 0$.

На уроках геометрії можна використовувати нижче представлені завдання.

- Розв'язати геометричні задачі, пов'язані з рухом та обертанням об'єктів.
1. Точка P рухається по колу радіусом r зі швидкістю v . Знайти координати точки P через час t .
 2. Пряма L обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω . Знайти координати точки P , яка знаходиться на прямій L через час t .
 3. Прямокутник $ABCD$ обертається навколо осі, що проходить через точку O і перпендикулярна площині прямокутника. Знайти координати вершин прямокутника через час t .
 4. Куля обертається навколо своєї осі. Знайти кутову швидкість кулі, якщо її момент інерції дорівнює I , а кутовий момент дорівнює L .
 5. Паралелепіпед обертається навколо осі, що проходить через точку O і паралельна площинам $ABCD$ і $EFGH$. Знайти кутову швидкість

паралелепіпеда, якщо його момент інерції дорівнює I , а кутовий момент дорівнює L .

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання геометричних задач, пов'язаних з рухом та обертанням матеріальних точок. Однак, у цих задачах об'єкти, які рухаються або обертаються, можуть мати складнішу форму, ніж матеріальна точка.

Для розв'язання таких задач можна використовувати такі прийоми:

- Розкладання руху або обертання на простіші рухи або обертання.
- Застосування формул для переміщення матеріальної точки.
- Застосування формул для моменту інерції.
- Застосування законів збереження енергії та імпульсу.

Наявність таких задач у шкільному курсі математики дозволяє учням розвивати логічне мислення, а також усвідомлювати зв'язок між геометричними та фізичними явищами.

● Розв'язати нерівності на комплексній площині.

1. Розв'язати нерівність $|z| \leq 1$.
2. Розв'язати нерівність $|z - 1| \geq 2$.
3. Розв'язати нерівність $|z - 2i| < 1$.
4. Розв'язати нерівність $|z| < 1$ і $|z + 2i| < 1$.
5. Розв'язати нерівність $|z| < 1$ і $|z - 2i| < 1$.

Ці завдання є аналогічними задачам на розв'язання нерівностей на дійсній прямій. Однак, у цих задачах змінна z є комплексним числом.

Для розв'язання таких задач можна використовувати такі прийоми:

- Розкладання комплексного числа на дійсну і уявну частини.
- Застосування формули для модуля комплексного числа.
- Застосування геометричного уявлення комплексних чисел.

Комплексні числа є потужним математичним інструментом, який має широке застосування в різних галузях науки та техніки. Вивчення

комплексних чисел у шкільному курсі математики дозволяє учням розвивати логічне мислення, а також усвідомлювати зв'язок між дійсними і комплексними числами.

При розробці прикладів задач з комплексними числами слід враховувати наступні фактори:

- рівень математичної підготовки учнів;
- тематичну спрямованість задач;
- складність задач;
- цікавість задач.

Приклади задач повинні бути такої складності, щоб учні могли їх розв'язати самостійно, але при цьому вони не повинні бути занадто простими. Також, приклади задач повинні бути цікавими для учнів, щоб вони захотіли їх розв'язати.

Розробка прикладів задач з комплексними числами – це цікаве та захоплююче заняття, яке може допомогти вчителям зробити вивчення математики більш цікавим та ефективним.

Висновки до розділу 2

Отже, практичні завдання з використанням комплексних чисел вказують на актуальність та значущість впровадження комплексних чисел у шкільний курс математики та практичних завдань у різних галузях науки.

Огляд задач шкільного курсу математики на застосування комплексних чисел вказує на їхню важливу роль у поглибленні математичного розуміння учнів. Розглянуті задачі демонструють практичний вигляд використання комплексних чисел у розв'язанні різноманітних математичних проблем, що сприяє розвитку аналітичного мислення та математичної компетентності.

Представлена система практичних завдань на застосування комплексних чисел у різних галузях науки розширює спектр можливостей їхнього використання. Завдання спрямовані на розвиток творчого мислення та вміння застосовувати математичні концепції в реальних ситуаціях. Це сприяє формуванню учнівської готовності до використання комплексних чисел як інструменту для вирішення практичних завдань в майбутньому.

В цілому, розділ 2 демонструє важливість практичної реалізації теми "Комплексні числа" у шкільному курсі математики, яка сприяє розвитку компетентностей учнів та формує їхню здатність застосовувати математичні знання у різних областях науки та практики.

ВИСНОВКИ

Комплексні числа виникають як розширення множини дійсних чисел та дозволяють розв'язувати математичні задачі, що не обмежуються лише дійсною площиною. Комплексні числа застосовують при розв'язанні поліноміальних рівнянь, в аналізі коливань, в електротехніці, квантовій механіці та багатьох інших галузях науки. Вони дозволяють геометрично інтерпретувати операції над числами, якщо останні представити у вигляді точок на комплексній площині.

Вивчення комплексних чисел сприяє розвитку абстрактного мислення учнів, розширює коло їх математичних умінь та можливостей до розв'язання практичних задач. Крім того, вивчення комплексних чисел надає засіб для розуміння і моделювання різних фізичних явищ, що є важливим у багатьох наукових дисциплінах.

У роботі розглянуто методику вивчення комплексних чисел та їх застосування до розв'язання задач шкільного курсу математики. Показано, що комплексні числа можна використовувати для розв'язання певних класів алгебраїчних, тригонометричних та геометричних задач.

Використання комплексних чисел для розв'язання задач шкільного курсу математики має ряд переваг, а саме:

- уніфікує та спрощує розв'язання деяких типів задач, зокрема, розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом та обчислення значень тригонометричних функцій для комплексних аргументів;
- надає додаткові можливості для розв'язання задач, які є не розв'язними в межах дійсних чисел.

Однак, використання комплексних чисел для розв'язання задач шкільного курсу математики має також ряд обмежень, зокрема складність, довгий термін вивчення, та вимагає певної підготовки від учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арсеньєва Т.М., Карпушина Н.В. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу. Київ: Генеза, 2019.
2. Бевз В.Г. Історія математики. К., 2007. С. 135–137.
3. Бевз В.Г. Практикум з історії математики : навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. К. : НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2008. 312с.
4. Буковська О.І. Комплексні числа. – Х.: Вид. група «Основа», 2004. – 112 с.
5. Гайдук І. І., Григор'єва В. Б. Комплексні числа в геометрії. *Редакційна колегія*. № 11. 2021.
6. Голобородько Ю.В. Практикум з алгебри та геометрії. Розв'язання завдань за комплексними числами. Київ: Лібра, 2008.
7. Григор'єва В.Б. Проблема використання міжпредметних зв'язків при викладанні навчальних курсів геометричного циклу. *Педагогічні науки: [зб. наук. праць / ред. Є.С. Барбіна]*. Херсон: ХДУ 2008. –Вип. 50. Ч. 2. С. 86-90.
8. Жугров Д.В. Комплексні числа в шкільному курсі математики. *XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»* (4-5 грудня 2019 р.). Ніжин. 2019.
9. Жугров Д.В. Комплексні числа та їх застосування. *Вісник студентського наукового товариства : збірник наукових праць студентів / за ред. О. В. Мельничука*. Вип. 22. Ніжин : НДУ ім. М. Гоголя, 2019. С. 14-15.
10. Жугров Д.В., Тарасенко О.В. Методичні особливості вивчення комплексних чисел у шкільному курсі математики з використанням GOOGLE CLASSROOM. *Збірник наукових праць за результатами II Всеукраїнської наукової Інтернет-конференції молодих вчених «Новітні інформаційні технології в освіті і науці»* (10-12 квітня 2019 р.). Переяслав-Хмельницький:

ПХДПУ, 2019. С. 108-109.

11. Ізюмченко Л. В., Нічишина В.В.,Ріжняк Р.Я. Цілі та комплексні числа : метод. посіб. для виконання контрольних робіт учнями 10-11 кл. Кіровоград : КДПУ ім. В. Винниченка, 2009. 112 с.
12. Кравчук І.В., Рівкінд І.Д. Алгебра. Підручник для 10-го класу. Київ: Генеза, 2010.
13. Кремень А.І., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків, 2009.
14. Курниш А. В. Комплексні числа в елементарній математиці. *Редакційна колегія.* № 29. 2014.
15. Кушнір Ісаак. Комплексні числа: Теорія і практика. К.: Факт, 2002. 168 с.
16. Маркушевич А.І. Комплексні числа і конформні відображення. Фізматгіз. 1960.
17. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра. Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики. Ч.2. Х., 2011.
18. Міндрук А. М. Основи алгебри та аналізу. Комплексні числа. Київ: Видавничий центр "Академія", 2014. 240 с.
19. Навчальна програма з математики (поглиблений рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року.
20. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Х., 2005.
21. Орач Б. Г. Комплексні числа: [поурочна методична розробка для класів з поглибленим вивченням математики] / Б. Г. Орач // Математика. – 2000. - №5(65)-8(68), 10(70). – С. 3-8.
22. Пивоваров Г. Комплексні числа в курсі алгебри середньої школи

(методична розробка) М.: Державне навчально-педагогічне видавництво. – 1961 р. – 60 с.

23. Пилипів В.М., Ліщинський І.І. Комплексні числа. Івано-Франківськ. 2021. 22 с.

24. Ущановська О., Котенко О., Сверчевська І. Комплексні числа як математичні моделі практичних задач. *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів*. № 8. 2015.

25. Хасанов В.Г., Рябенко І.В. Комплексні числа в геометричних задачах. *Математика в школі*, 2003, № 1, с. 44-47.

26. Хмара Т., Шаран О. Застосування комплексних чисел до розв'язування геометричних задач. *Математика в школі*. 2004. №8. С. 32–40.

27. Хом'юк І.В. Деякі аспекти використання компетентнісного підходу до викладання фундаментальних дисциплін у ВНЗ. *Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2012. Вип. № 22(257). С. 215–222.

28. Хом'юк І. В., Поперечний К. С. Комплексні числа: історичний аналіз. *Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя»*. Краматорськ, 15–16 травня 2017 р. 81-84 с.

29. Черненко О. О. Лекція №19 Комплексні числа та операції над ними. Комплексні числа. Алгебра та геометрія. Частина 2.: конспект лекцій для спеціальності 122 денної форми навчання. Полтава: ММСІ, ПУЕТ, 2020 – 5с.

30. Черненко О. О. Лекція №20 Тригонометрична та показникова форми представлення комплексних чисел. Комплексні числа. Алгебра та геометрія. Частина 2.: конспект лекцій для спеціальності 122 денної форми навчання. Полтава: ММСІ, ПУЕТ, 2020 – 5с.

31. Черненко О. О. Практичне заняття до лекції №20 Тригонометрична та

показникова форми представлення комплексних чисел. Комплексні числа. Алгебра та геометрія. Частина 2.: конспект лекцій для спеціальності 122 денної форми навчання. Полтава: ММСІ, ПУЕТ, 2020. 7с.

32. Шаран О. Конспекти уроків з теми «Комплексні числа». *Математика в школі*. №2,3. 2008.

33. Щоголев С. А. Комплексні числа: навчально-методичний посібник. Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. 44 с.